

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

23. Band, Heft 4

1. November 1940

S. 145—192

## Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

● **Jeffreys, Harold:** *Theory of probability.* Oxford: Clarendon press 1939. 338 pag. 21/-.

**Yosida, Kôsaku:** The Markoff process with a stable distribution. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 43—48 (1940).

Let  $B(\Omega)$  be a completely additive family of „measurable“ subsets of the space  $\Omega$ ,  $\Omega$  itself belonging to  $B(\Omega)$ . Let  $P(t, E)$  denote the transition probability that the point  $t \in \Omega$  is transferred, by a simple Markoff process, into the set  $E \in B(\Omega)$  in a unit time. The iterated processes of  $P(t, E) = P^{(1)}(t, E)$  are defined by

$$P^{(m)}(t, E) = \int_{\Omega} P^{(m-1)}(t, ds) P(s, E), \quad m = 2, 3, \dots$$

This Markoff process is called to have a stable distribution  $\varphi(E)$ , if there exists a completely additive non-negative set function  $\varphi(E)$ , defined for all measurable subsets  $E$  of  $\Omega$ ,  $\varphi(\Omega) = 1$ , and such that  $\int_{\Omega} \varphi(dt) P(t, E) = \varphi(E)$  for all measurable subsets

$E$  of  $\Omega$ . The author shows that, for Markoff processes with a stable distribution  $\varphi(E)$ , a mean ergodic theorem holds. Let  $f(t)$  be a  $\varphi$ -integrable function, then the transformed functions

$$f^{(m)}(t) = \int_{\Omega} P^{(m)}(t, ds) f(s) \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

are also  $\varphi$ -integrable and there exists a  $\varphi$ -integrable  $f^*(t)$  such that

$$\int_{\Omega} \left| \frac{1}{N} \sum_1^N f^{(m)}(t) - f^*(t) \right| \varphi(dt) \rightarrow 0.$$

Since the measure preserving transformations of  $\Omega$  are Markoff processes with stable distribution, this result contains the mean ergodic theorem (for  $L$ ) of von Neumann. — The author shows that if  $\Omega$  is a compactum,  $B(\Omega)$  consisting of the family of the Borel sets of  $\Omega$ , and if  $\int_{\Omega} P(t, ds) f(s)$  is continuous in  $s$  for all continuous  $f(t)$ , then any stable distribution of  $P(t, E)$  may be obtained as a „convex combination“ of the

limit-distributions of distributions of the following form:  $\frac{1}{m-n} \sum_{n+1}^m P^{(k)}(t_0, E)$  ( $t_0$  being a fixed point of  $\Omega$ ).

Béla v. Sz. Nagy (Szeged).

**Kakutani, Shizuo:** Ergodic theorems and the Markoff process with a stable distribution. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 49—54 (1940).

The author proves, modifying certain arguments of J. L. Doob [Trans. Amer. Math. Soc. **44**, 87—150 (1938); this Zbl. **19**, 127], that even an „individual“ ergodic theorem is valid for the class of Markoff processes with stable distributions  $\varphi(E)$  (see the preceding note of Yosida). Indeed, if  $f(t)$  is a bounded measurable function,

then (1)  $\frac{1}{N} \sum_1^N f^{(m)}(t)$  converges  $\varphi$ -almost everywhere on  $\Omega$ . The proof appeals to Birk-

hoff-Khintchine's ergodic theorem and to the measure theory of infinite product spaces. It is also shown that the mean ergodic theorem is a consequence of this result. —

However, the convergence of (1) for non-bounded  $\varphi$ -integrable functions  $f(t)$  is not yet been proved.

Béla v. Sz. Nagy (Szeged).

**Hilmy, Heinrich:** Sur la récurrence ergodique dans les systèmes dynamiques. Rec. math. Moscou, N. s. 7, 101—108 (1940).

Consider a stationary motion in a metric separable space  $M$ , and denote by  $f(p, t)$  the position of the point  $p$  at the instant  $t$ ;  $f(p, 0) = p$ . Let there be given an invariant measure in  $M$  such that  $\text{mes}(M) < \infty$ . The trajectory  $f(p, t)$  is called recurrent „in probability“ if for any open set  $G \ni p$  of the enumerable open base of  $M$  the

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t C_G(f(p, t)) dt$  exists and is  $> 0$ , where  $C_G(p)$  is the characteristic function

of the set  $G$ . By appealing to Birkhoff-Khinchine's ergodic theorem it is proved that almost all the points of  $M$  are situated on the trajectories which are recurrent in probability. The result is applied to the restricted problem of three bodies. The paper of Kryloff-Bogoliouboff (this Zbl. 16, 86) seems to be unknown to the author.

Kôzaku Yosida (Osaka).

**Kawata, Tatsuo:** On the strong law of large numbers. Proc. Imp. Jap. Acad. 16, 109—112 (1940).

Soit  $X_1, X_2 \dots X_n, \dots$  (1) une suite de variables aléatoires et soit  $E(X_n)$  la valeur moyenne de  $X_n$ . Si  $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$  converge vers zéro avec la probabilité égale à l'unité, on dit que la suite (1) obéit à la loi forte des grands nombres [voir A. Kolmogoroff, C. R. Acad. Sci., Paris 191, 910 (1930); P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires ce Zbl. 16, 170]. Il démontre que si

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(X_n^2)}{n^2} < \infty$ , la suite (1) obéit à la loi forte des grands nombres. B. Hostinský.

**Riebesell, Paul:** Neue deutsche Forschungen über das Gesetz der großen Zahl. Bl. Versich.-Math. 5, 68—75 (1940).

Im Rahmen eines Vortrags berichtet Verf. über einige der zahlreichen und wertvollen, in Arbeiten von van der Waerden [dies. Zbl. 15, 168], v. Schelling [dies. Zbl. 17, 125; Die mathematisch-statistische Bewertung von Stichproben und deren Bedeutung für die Beurteilung von Tierversuchen. Arb. Staatsinst. exper. Ther. Frankf., 1. Mitt. H. 35, 69—112 (1938); 2. Mitt. H. 37, 28—54 (1939)], W. Schäfer [dies. Zbl. 22, 372], Prigge [dies. Zbl. 16, 320] enthaltenen neueren Ergebnisse aus der für die biologische und medizinische Anwendung außerordentlich wichtigen Theorie der Beurteilung und Vergleichung beobachteter Häufigkeiten.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

● **Plummer, H. C.:** Probability and frequency. New York a. London: Macmillan Co. 1939. XI, 227 pag. 15/-.

**Riebesell, P.:** Einige grundsätzliche Bemerkungen zur Frage des mittleren Fehlers. Mitt. math. Ges. Hamburg 8, Tl. 2, 31—33 (1940).

Verf. tritt im ersten Abschnitt dafür ein, den wahren Anteil eines alternativen Merkmals durch den Erwartungswert und die Streuung der speziellen Verteilung von Th. Bayes festzulegen. Im zweiten Teil berichtet er knapp über ein neues Schätzungsverfahren von R. Prigge [Naturwiss. 25, 169—170 (1937); dies. Zbl. 16, 320] und die daran anknüpfende Literatur.

v. Schelling (Berlin).

**Rodgers, Eric:** Probable error for Poisson distributions. Phys. Rev., II. s. 57, 735—737 (1940).

Es wird gezeigt, daß für die Poissonverteilung sowohl die wahrscheinliche Abweichung als auch die Wahrscheinlichkeit  $P_\sigma$  dafür, daß eine Abweichung nicht größer als die mittlere quadratische Abweichung sei, wenn der Mittelwert  $x$  über alle Grenzen wächst, gegen die entsprechenden Werte der Normalverteilung konvergieren, und an einer Abbildung verdeutlicht, wie mit wachsendem  $x$   $P_\sigma$  von oben her seinem Grenzwert 0,68269 und das Verhältnis des wahrscheinlichen Fehlers zu  $\sigma$  von unten her seinem Grenzwert 0,67449 zustrebt.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).



**Franckx, E.: L'inégalité de Bienaymé et ses généralisations.** Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 25, 206—211 (1939).

Verf. gibt eine Verschärfung der Cantelli-Slutsky-Verallgemeinerung der Bienayméschen Ungleichung in der Annahme, daß die Verteilungsfunktion durch eine lineare Funktion majorisiert werden kann. *Bruno de Finetti* (Trieste).

**Gordon, Robert Dean: Estimating bacterial populations by the dilution method.** Biometrika 31, 167—180 (1939).

Die Arbeit enthält eine eingehendere Darstellung der bereits 1938 vom Verf. (Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 24, 212—215) in gedrängter Fassung publizierten Ergebnisse über folgende zur Bakterienzählung dienende Verdünnungsmethode: Von der zu untersuchenden bakterienhaltigen Nährlösung wird ein Teil 10fach, ein weiterer 100fach verdünnt. Um die mittlere Bakteriendichte  $\varrho$  der 10fach verdünnten Lösung zu schätzen, werden mit je 10 Stichproben (gleichen Volumens) aus den drei verschiedenen Lösungen ebenso viele sterile Nährböden geimpft. Da die Anzahl der Bakterien, die rein zufallsmäßig in der Volumeinheit zu erwarten ist, in jeder der drei Lösungen angenähert einer Poissonverteilung mit dem Mittelwert  $10\varrho$  bzw.  $\varrho$  bzw.  $0,1\varrho$  unterliegt, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von den drei Reihen  $n_{10}$  bzw.  $n_1$  bzw.  $n_{0,1}$  Kulturen positiv reagieren, d. h. mit mindestens einem Bakterium infiziert sind,

$$G_{\varrho}^{(3)}(n_{10}, n_1, n_{0,1}) = \frac{(10!)^3 (e^{-10\varrho})^{10-n_{10}} (e^{-\varrho})^{10-n_1} (e^{-0,1\varrho})^{10-n_{0,1}} (1-e^{-10\varrho})^{n_{10}} (1-e^{-\varrho})^{n_1} (1-e^{-0,1\varrho})^{n_{0,1}}}{n_{10}! n_1! n_{0,1}! (10-n_{10})! (10-n_1)! (10-n_{0,1})!}.$$

Unter der Annahme konstanter a-priorischer Wahrscheinlichkeit für  $\varrho$  ergibt sich (Bayes) für die unbekannte wahre Bakteriendichte  $\varrho$  a posteriori die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P_{\varrho} = \frac{G_{\varrho}^{(3)}(n_{10}, n_1, n_{0,1})}{\int_0^{\infty} G_{\varrho}^{(3)}(n_{10}, n_1, n_{0,1}) d\varrho}.$$

Verf. berechnet nun nicht  $\varrho$  selbst, sondern Mittelwert und Streuung der angenähert normal verteilten Größe  $\log \varrho$ . *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

**Geppert, Maria-Pia: Über eine Klasse von zweidimensionalen Verteilungen.** Z. angew. Math. Mech. 20, 45—49 (1940).

Eine zweidimensionale Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x, y) \geq 0$  ist gegeben; die Zufallsvariablen  $x, y$  deuten wir als cartesische Koordinaten in der Ebene. Es wird der Einfluß betrachtet, den eine Drehung des Koordinatensystems:  $\bar{x} = x \cos \omega + y \sin \omega$ ,  $\bar{y} = -x \sin \omega + y \cos \omega$  auf die Verteilungsfunktion ausübt. Unter anderem wird folgender Satz bewiesen: Die Verteilungen vom Typ  $f(x, y) = f(ax^2 + 2bxy + cy^2)$ ,  $a \cdot c > 0$  sind die einzigen in zwei Variablen, die jeder beliebigen Drehung des Koordinatensystems gegenüber die Linearität der Regression bewahren (d. h. die Endpunkte der  $y$ -Koordinaten, die man als Mittelwerte aller  $y$  bei konstantem  $x$  berechnet, liegen auf einer Geraden, welche den Anfangspunkt enthält). *B. Hostinský* (Brünn).

**Truksa, L.: The simultaneous distribution in samples of mean and standard deviation, and of mean and variance.** Biometrika 31, 256—271 (1940).

Es sei  $f(x)dx$  das Verteilungsgesetz einer kontinuierlichen Zufallsvariablen,  $\bar{x}$  und  $s$  Mittelwert und mittlere quadratische Abweichung einer zufälligen Stichprobe vom Umfange  $t$ ,  $\bar{X}$  und  $S$  Mittelwert und mittlere Abweichung der um 2 Elemente vergrößerten Stichprobe. Ist dann  $F_t(\bar{x}, s)dxds$  die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $\bar{x}$  und  $s$  in Stichproben vom Umfange  $t$ , so gilt für die zweidimensionale Verteilungsdichte von  $\bar{X}$  und  $S$  in Stichproben vom Umfange  $t+2$  die Rekursionsformel

$$F_{t+2}(\bar{X}, S) = 2S(t+2)^2 \int \int F_t(\bar{x}, s) f\left(\frac{t+2}{2}\bar{X} - \frac{t}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\alpha\right) f\left(\frac{t+2}{2}\bar{X} - \frac{t}{2}\bar{x} - \frac{1}{2}\alpha\right) \frac{d\bar{x}ds}{\alpha}$$

$$\text{mit} \quad \alpha = \sqrt{2[(t+2)S^2 - ts^2] - t(t+2)(\bar{X} - \bar{x})^2}.$$

Entsprechend gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichte  $G_t(\bar{x}, u)$  bzw.  $G_{t+2}(\bar{X}, U)$  der



Simultanverteilung des Mittelwertes  $\bar{x}$  bzw.  $\bar{X}$  und der Streuung  $u = s^2$  bzw.  $U = S^2$  die Rekursionsformel

$$G_{t+2}(\bar{X}, U) = \\ = (t+2)^2 \int_{\Omega} G_t(\bar{x}, u) f\left(\frac{t+2}{2} \bar{X} - \frac{t}{2} \bar{x} + \frac{1}{2} \alpha\right) f\left(\frac{t+2}{2} \bar{X} - \frac{t}{2} \bar{x} - \frac{1}{2} \alpha\right) \frac{d\bar{x} du}{\alpha}.$$

Eingehend untersucht Verf. die Integrationsgrenzen für die Fälle, in denen  $f(x)$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  bzw. von 0 bis  $\infty$  bzw. von 0 bis  $a$  definiert ist. *M. P. Geppert.*

**Johnson, N. L., and B. L. Welch:** Applications of the non-central  $t$ -distribution. *Biometrika* 31, 362—389 (1940).

Es sei  $z$  normal um den Nullpunkt mit der Streuung 1 verteilt, und  $w$  verhalte sich wie  $\chi^2: f$ , wobei  $f$  die Anzahl der Freiheitsgrade von  $\chi^2$  angibt. Wenn noch  $\delta$  eine beliebige Konstante bedeutet, so betrachten die Verff. den Ausdruck  $t = (z + \delta)/\sqrt{w}$ , der für  $\delta = 0$  in „Student's“ gleichbezeichnete Größe übergeht. Die Verteilung dieses verallgemeinerten  $t$  hat bereits R. A. Fisher (Introduction to British Association Mathematical Tables 1, XXVI, London 1931) angegeben, der auch schon die ersten Tabellierungen veranlaßt hat. Doch diese sind wenig zweckmäßig. Die Schwierigkeit besteht darin, daß man es mit drei Parametern zu tun hat, so daß eine ganze Serie von Tafeln mit doppeltem Eingang notwendig wird. Die Verf. haben eine sehr geeignete Form gefunden, auf kleinem Raum Hilfsmittel bereitzustellen, welche es ermöglichen, durch eine kurze Rechnung die gesuchten Größen in aller Strenge zu erhalten. — In der Einleitung wird gezeigt, wie vielseitig die Tafeln verwandt werden können. So läßt sich z. B. die Verteilung des Variationskoeffizienten  $\sigma:M$  auf die nichtzentrale  $t$ -Verteilung zurückführen. Auch die Wahrscheinlichkeit eines Irrtums zweiter Art läßt sich stets ermitteln, natürlich auch in dem wichtigen Spezialfall von „Student“, d. h. für  $\delta = 0$ . *v. Schelling* (Berlin-Charlottenburg).

**Aitken, A. C.:** Note on the derivation and distribution of Pearson's  $\chi^2$ . *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, II. s. 6, 57—60 (1939).

**Kendall, M. G., and B. Babington Smith:** On the method of paired comparisons. *Biometrika* 31, 324—345 (1940).

Liegen  $n$  Gegenstände vor, die sich in bezug auf eine nicht objektiv meßbare Eigenschaft unterscheiden, so besteht die Methode der paarweisen Vergleiche darin, daß ein Beobachter die  $\binom{n}{2}$  möglichen Paare von Gegenständen getrennt zu beurteilen hat. Es sei  $d$  die Anzahl der in seinen  $\binom{n}{2}$  Teilurteilen steckenden elementaren Inkonssequenzen der Art  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ , wobei  $A \rightarrow B$  die Bevorzugung von  $A$  vor  $B$  bedeutet; dann definieren Verff. die Größe  $\zeta = 1 - 24 d(n^3 - n)$  bzw.  $1 - 24 d(n^3 - 4n)$  für ungerades bzw. gerades  $n$ , die gleich 1 ist dann und nur dann, wenn  $d = 0$ , und  $= 0$  ist, wenn  $d$  sein Maximum erreicht, als Konsequenzkoeffizienten (coefficient of consistence) und bestimmen rekursiv die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $d$  für  $n = 2, 3, \dots, 7$  im Falle, daß der Beurteiler seine Urteile zufallsmäßig abgegeben habe. Sind  $m$  Beurteiler herangezogen worden und haben  $\gamma$  von ihnen dem Objekt  $X$  vor  $Y$  den Vorzug gegeben, so ist  $2 \sum \binom{\gamma}{2}$  die Anzahl von paarweisen Übereinstimmungen zwischen den  $m$  Beurteilern und  $u = 2 \sum \binom{\gamma}{2} / \binom{m}{2} \binom{n}{2} - 1$  der sog. Übereinstimmungskoeffizient, der bei vollständiger Übereinstimmung aller  $m$  Beurteiler und nur dann  $= 1$  wird. Unter der Voraussetzung, daß sämtliche Urteile zufälliger Natur seien, geben Verff. die Verteilung von  $\sum \binom{\gamma}{2}$  für  $m = 3$  und  $n = 2$  bis 8,  $m = 4$  und  $n = 2$  bis 6,  $m = 5$  und  $n = 2$  bis 5,  $m = 6$  und  $n = 2$  bis 4 exakt und für die übrigen Werte  $m, n$  durch eine Pearsonkurve vom Typ III genähert an und führen so die Echtheitsprüfung für die Übereinstimmung auf den  $\chi^2$ -Test zurück.

*M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

**Cochran, W. G.:** The use of the analysis of variance in enumeration by sampling. J. Amer. Statist. Assoc. **34**, 492—510 (1939).

**Mood, A. M.:** Note on the  $L_1$  test for many samples. Ann. math. Statist. **10**, 187—190 (1939).

Will man prüfen, ob  $k$  Stichproben von  $n_1, n_2, \dots, n_k$  Gliedern alle normalen Kollektiven mit gleichen Streuungen entstammen, so bildet man die Größe

$$L_1^N = \prod_{t=1}^k \left( \frac{s_t^2}{\bar{s}^2} \right)^{\frac{n_t}{2}} \quad \text{mit} \quad N = \sum_{t=1}^k n_t.$$

Dann ist  $(-N \log^e L_1)$  annähernd wie  $\chi^2$  bei  $(k-1)$  Freiheitsgraden verteilt. Verf. will die Güte dieser Approximation bei großem  $k$  und mäßigen  $n_t$ -Werten beurteilen. Dazu vergleicht er die ersten Semiinvarianten von  $(-N \log^e L_1)$  und von  $\chi^2$  miteinander. Die Annäherung erweist sich schon bei kleinen  $n_t$ -Werten als praktisch unabhängig von  $k$ . Bereits für  $n_t \geq 20$  ist sie als durchaus befriedigend zu bezeichnen.

v. Schelling (Berlin-Charlottenburg).

**Hartley, H. O.:** Testing the homogeneity of a set of variances. Biometrika **31**, 249—255 (1940).

Die Arbeit befaßt sich mit dem von Neyman und E. S. Pearson (dies. Zbl. **4**, 157) stammenden, zur Prüfung der Homogenität von geschätzten Streuungen dienenden  $L_1$ -Test. Liegen  $k$  normal verteilte Kollektive mit den Streuungen  $\sigma_t^2$  ( $t = 1, 2, \dots, k$ ) vor und ist  $s_t^2$  eine auf  $f_t$  Freiheitsgraden beruhende Schätzung von  $\sigma_t^2$ , so bestimmt Verf. die Verteilung  $\psi(x)$  der Größe  $x = -F \cdot \log L_1'$  in Stichproben unter der zu prüfenden Annahme  $\sigma_t^2 = \sigma^2$  ( $t = 1, 2, \dots, k$ ), wobei  $F = \sum_{t=1}^k f_t$  und

$$L_1' = \prod_{t=1}^k \left( \frac{F}{f_t} \right)^{\frac{f_t}{F}} \prod_{t=1}^k \left\{ \frac{f_t s_t^2}{\sum_t f_t s_t^2} \right\}^{\frac{f_t}{F}}.$$

Für das Wahrscheinlichkeitsintegral von  $x$  ergibt sich die Näherung:

$$P(X) = \int_X^\infty \psi(x) dx = \sum_{i=0}^\infty \alpha_i P_{k-1+2i}(X) \cdot \left( \sum_{i=0}^\infty \alpha_i \right)^{-1},$$

wo

$$P_j(X) = T\left(\frac{j}{2}\right)^{-1} \cdot 2^{-\frac{1}{2}j} \int_X^\infty x^{\frac{1}{2}(j-2)} e^{-\frac{1}{2}x} dx$$

das Wahrscheinlichkeitsintegral von  $\chi^2$  bei  $j$  Freiheitsgraden und  $\alpha_i$  die Koeffizienten

der Entwicklung von  $e^{\frac{1}{2}c_1 t - \frac{1}{2}c_3 t^3}$  nach Potenzen von  $t$  bedeuten mit  $c_1 = \sum_{t=1}^k \frac{1}{f_t} - \frac{1}{F}$ ,  $c_3 = \sum_{t=1}^k \frac{1}{f_t^3} - \frac{1}{F^3}$ . Der allgemeine Fall läßt sich somit auf den von Nair (dies. Zbl. **20**,

148) exakt behandelten Sonderfall  $f_t = f$  ( $t = 1, 2, \dots, k$ ) zurückführen, indem man nicht, wie Nayer (dies. Zbl. **14**, 357) vorschlägt, das arithmetische Mittel der  $f_t$ , sondern

$f = \left(k - \frac{1}{k}\right) \cdot \left[\sum_{t=1}^k \frac{1}{f_t} - \frac{1}{F}\right]^{-1}$  als einheitliche Freiheitsgradanzahl nimmt. Schließlich

wird obige Näherung mit der von M. S. Bartlett (dies. Zbl. **16**, 412) angegebenen,

auf der Verteilung von  $\mu = L_1^{\frac{F}{2}}$  fußenden Näherung verglichen. M. P. Geppert.

**Alter, Dinsmore:** Correction of sample moment bias due to lack of high contact and to histogram grouping. Ann. math. Statist. **10**, 192—195 (1939).

Wenn eine Einteilung in Klassen vorgenommen wird, so ändern sich die Momente. Durch die Korrektur von W. F. Sheppard [Proc. London Math. Soc. **29**, 353—380



(1898)] pflegt man diesen systematischen Fehler nach Möglichkeit auszugleichen. Die Methode versagt aber, wenn die empirische Verteilung sich nicht an beiden Enden an die Abszissenachse anschmiegt. Verf. gründet auf einfache Interpolationsformeln ein Verfahren, das immer anwendbar sein soll. Ein Beispiel scheint dies zu bestätigen. Doch es ist rein theoretisch und wird den praktischen Verhältnissen nicht gerecht. R. A. Fisher [Ann. Eugenics London 7, 303—318 (1937)] hat gezeigt, daß die bisherigen Versuche, eine Korrektur wegen mangelnder Anschmiegung an die Abszissenachse vorzunehmen, völlig gescheitert sind. Wenn Verf. in seinem abstrakten Beispiel ähnliche Werte wie seine Vorgänger erhält, so könnte das vernichtende Urteil Fishers auch auf seinen Ansatz zutreffen.  
v. Schelling (Berlin-Charlottenburg).

**Yates, F.: Tests of significance of the differences between regression coefficients derived from two sets of correlated variates.** Proc. roy. Soc. Edinburgh 59, 184—194 (1939).

Ziel des Verf. ist es, die Differenz zweier Regressionskoeffizienten zu beurteilen. Einfach liegt der Fall, wenn alle unabhängigen statistischen Größen jeweils den gleichen Wert annehmen, eine Besonderheit, die bei Versuchsanordnungen in der Landwirtschaft vorkommt. Schwierigkeiten sind dagegen zu überwinden, wenn diese enge Voraussetzung nicht mehr erfüllt ist. Sie sind weniger theoretischer als praktischer Natur. Es gelingt dem Verf., Schemata für die Berechnung der notwendigen Summen und Doppelsummen anzugeben, welche die numerische Arbeit abkürzen und übersichtlicher gestalten. Trotzdem bleibt sie recht groß, so daß es fraglich ist, ob der Nutzen die Mühe lohnt. Das Zahlenbeispiel des Verf. zerstreut diese Zweifel keineswegs.

v. Schelling (Berlin-Charlottenburg).

**Gumbel, E.-J.: La durée de retour des températures annuelles extrêmes.** C. R. Acad. Sci., Paris 210, 468—470 (1940).

Die Theorie der äußersten Werte wird angewendet, um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß die Temperatur gegebene obere bzw. untere Grenzen überschreite. Statt der Wahrscheinlichkeit kann man die „Wiederkehrsdauer“ einführen, die als Reziproke der Wahrscheinlichkeit definiert wird.  
Bruno de Finetti (Trieste).

## Numerische und graphische Methoden.

**Zoukhovitzky, S.: Sur l'approximation minimum des systèmes d'équations linéaires incompatibles en rapport avec certains autres problèmes minima.** Rec. Trav. Inst. Math. Nr 3, 73—75 u. franz. Zusammenfassung 76 (1940) [Russisch].

L'au. démontre que les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système des équations linéaires incompatible  $\sum_{v=1}^n a_{\mu v} x_v = b_{\mu}$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, m$ , ait pour toutes  $b_{\mu}$  un système de valeurs des inconnus, qui donnent l'approximation minimum du système consistent en ceci que les déterminants d'ordre  $n$  de la matrice  $\|a_{\mu v}\|$  ne soient pas zéro.  
N. Obrechhoff (Sofia).

**Turton, F. J.: The errors in the numerical solution of differential equations.** Philos. Mag., VII. s. 28, 359—363 (1939).

Die verschiedenen Fehlermöglichkeiten bei der schrittweisen numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. (1. Ungenauigkeiten der Ausgangsdaten, 2. Formelfehler, 3. Abrundungsfehler, 4. Zufällige Fehler.)  
Collatz.

**Turton, F. J.: Two notes on the numerical solution of differential equations.** Philos. Mag., VII. s. 28, 381—384 (1939).

Es werden Interpolationsformeln mit Restgliedern hergeleitet, die bei äquidistanten Abszissen  $x_r = rh$  den Funktionswert  $y_r = y(x_r)$  ausdrücken durch die Werte  $y_0, y_1, y'_0, y'_1$  oder in höherer Annäherung durch Hinzunahme von  $y_{-1}$  und  $y'_{-1}$ . Es treten also nicht die Werte des Differenzenschemas auf. Die hier genannten Formeln eignen sich zur schrittweisen numerischen Integration gewöhnlicher Diffe-



rentialgleichungen erster Ordnung, bei denen sich die Ableitung  $y'$  leicht berechnen läßt. Für die Berechnung des notwendigen Anfangsstückes werden Iterationsformeln angegeben, bei denen z. B. bei gegebenen  $y_0, y'_0$  die Werte  $y_1, y_2, y_3, y_4$  durch Ausdrücke der oben angegebenen Art (Linearkombinationen von  $y_0, y_1 \dots y_4, y'_0, \dots y'_4$ , aber keine Werte des Differenzenschemas) dargestellt und iterativ verbessert werden.

Collatz (Karlsruhe).

**Gandy, R. W. G., and R. V. Southwell:** Relaxation methods applied to engineering problems. V. Conformal transformation of a region in plane space. Philos. Trans. Roy. Soc. Lond. A 238, 453—475 (1940).

Nach den Methoden, die der eine der Verff. in der Arbeit: D. G. Christopherson und R. C. Southwell, Relaxation methods applied to engineering problems III. Problems involving two independent variables, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 168, 317 (1938), entwickelt hat und die im Prinzip darauf beruhen, daß der Laplacesche Operator durch entsprechende Differenzengleichungen ersetzt wird, behandeln die Verff. einige spezielle Probleme der konformen Abbildung. Insbesondere werden die folgenden vier Abbildungsaufgaben betrachtet: 1. Abbildung eines abgeschlossenen Bereiches auf einen Kreis. 2. Abbildung eines abgeschlossenen Bereiches auf ein Rechteck. 3. Abbildung des Äußeren eines abgeschlossenen Bereiches auf das Äußere eines Kreises. 4. Abbildung eines semi-unendlichen Bereiches auf eine Halbebene oder einen unendlichen Streifen.

Wegner (Heidelberg).

**Crout, Prescott D.:** An application of polynomial approximation to the solution of integral equations arising in physical problems. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 19, 34—92 (1940).

Die ausführliche, lehrbuchartig geschriebene Arbeit will zeigen, wie Integralgleichungen mit erträglichem Aufwand an Rechenarbeit durch Verwendung von Polynomen numerisch gelöst werden können, insbesondere wenn man von Tafeln Gebrauch macht, die zur Ausführung von Lagrangeschen Interpolationen berechnet worden sind und von denen wesentliche Teile in der Arbeit wiedergegeben sind, die vom Verf. in Zusammenarbeit mit Rutledge hergestellt wurden. An drei Beispielen von Integralgleichungen erster und zweiter Art wird das Vorgehen im einzelnen besprochen. Strenge Fehlerabschätzungen werden nicht gegeben. Es werden die Gesichtspunkte angeführt, die mehr aus physikalischen Gründen erwarten lassen, daß die Näherungen gut sind. Im übrigen enthält die Arbeit eine Fülle von Hinweisen für die praktische Ausführung der Zahlenrechnungen. Die beigegebenen Tafeln geben die Koeffizienten  $K, K', K''$  und  $C$  der Polynome

$$y = K_{-n}y_{-n} + \dots + K_{-1}y_{-1} + K_0y_0 + K_1y_1 + \dots + K_ny_n,$$

$$y' = K'_{-n}y_{-n} + \dots + K'_{-1}y_{-1} + K'_0y_0 + K'_1y_1 + \dots + K'_ny_n,$$

$$y'' = K''_{-n}y_{-n} + \dots + K''_{-1}y_{-1} + K''_0y_0 + K''_1y_1 + \dots + K''_ny_n,$$

$$\int_{x_0-nh}^{x_0+nh} y dx = h[C_{-n}y_{-n} + \dots + C_{-1}y_{-1} + C_0y_0 + C_1y_1 + \dots + C_ny_n],$$

die als Interpolationspolynome der Funktionen  $y(x), y'(x), y''(x)$  und  $\int y dx$  aus den  $(2n+1)$  äquidistanten Funktionswerten  $y_{-n} \dots, y_{-1}, y_0, y_{+1} \dots, y_{+n}$  hergestellt werden können, und zwar jeweils für  $n = 1, 2, 3$ , also für 3, 5 oder 9 Punkte. Wegen der Tafeln für  $n = 4$  wird auf ein demnächst erscheinendes Tafelwerk verwiesen.

K. Klotter (Berlin-Charlottenburg).

**Espley, D. C.:** Harmonic analysis by the method of central differences. Philos. Mag., VII. s. 28, 338—352 (1939).

Es wird eine Methode entwickelt, um harmonische Analysen von Beobachtungsreihen, wie sie bei speziellen elektrotechnischen Problemen [siehe Espley, The calculation of harmonic production in thermionic valves with resistive loads. Proc. Inst. Radio Engr. 21 (1933)] auftreten, durch Benutzung eines Differenzenschemas zu er-



leichtern. Benutzt wird die Newtonsche Interpolationsformel für zentrale Differenzen, die in der deutschen Literatur meist in der Form  $f(u + n\omega) = f(u) + n f'(u) + \frac{n^2}{2!} f''(u) + \frac{n(n^2 - 1)}{3!} f'''(u) + \dots$  geschrieben wird. Diese Formel führt zur Darstellung der Beobachtungsreihe durch eine ganze rationale Funktion  $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ , deren Koeffizienten aus den Differenzen des Schemas aufgebaut sind. Den Verf. interessieren Reihenentwicklungen von der Gestalt  $J = a_0 + a_1 (k \sin \omega t) + a_2 (k \sin \omega t)^2 + \dots$ , die sich auch in die Form einer trigonometrischen Reihe  $J = f_0 + f_1 \sin \omega t + f_2 \cos 2\omega t + f_3 \sin 3\omega t + \dots$  überführen lassen, deren Konstanten als lineare Funktionen der Differenzen geschrieben werden können, mit lediglich von  $k$  abhängigen Koeffizienten. In einer Tabelle werden für die ersten fünf Harmonischen diese Koeffizienten für verschiedene Werte von  $k$  angegeben. Einige Musterbeispiele werden durchgerechnet.

K. Stumpf (Berlin).

**Pipes, Louis A.:** The method of symmetrical components applied to harmonic analysis. Philos. Mag., VII. s. 29, 66—74 (1940).

Eine Beschreibung der harmonischen Analyse äquidistanter Beobachtungsreihen, die wesentlich neue Gesichtspunkte nicht enthält. Es wird nur von der Möglichkeit der Darstellung der trigonometrischen Faktoren durch Vektoren in der komplexen Ebene Gebrauch gemacht. Als Beispiel wird eine Analyse von 12 Ordinaten durchgeführt, auch wird der in der Elektrotechnik häufig vorkommende Fall, daß nur Wellen ungerader Ordnung vorkommen, behandelt.

K. Stumpf (Berlin).

**Rothert, Hubert:** Über die Fourier-Entwicklung der Felderregerkurve von dreiphasigen Durchmesser-Ganzlochwicklungen. Arch. Elektrotechn. 34, 285—293 (1940).

Die vom Verf. formelmäßig harmonisch analysierte Felderregerkurve ist eine verallgemeinerte Trapezkurve, bestehend aus stetig aneinanderschließenden geradlinigen Stücken von abwechselnd verschwindender und nichtverschwindender Steigung. Sie wird aus gewöhnlichen Trapezkurven durch additive Überlagerung gewonnen. Nachträglich wird der bekannte Sonderfall fehlender waagerechter Stücke und der Grenzfall der stückweise konstanten Funktion betrachtet. — Die Behauptung auf S. 289 oben ist nach Ausdrucksweise und Inhalt falsch.

Theodor Zech (Darmstadt).

**Jordan, H.:** Graphische Fourieranalyse. AEG.-Mitt. H. 5/6, 107—111 (1940).

Im Gegensatz zu den üblichen Verfahren der graphischen Fourieranalyse mit Ersatz der Funktion durch eine Treppenkurve wird hier die Funktion durch einen Polygonzug angenähert. Dies bietet den Vorteil, daß schon bei wenig Eckpunkten eine gute Näherung an die Kurve erreicht wird und die Angabe der Fourierkoeffizienten nach dem Verfahren der Unstetigkeiten (vgl. Koehler und Walther, dies. Zbl. 3, 66) mühelos und schnell erfolgen kann, da bei einem Polygonzug nur Unstetigkeiten in der Funktion selbst und ihrer ersten Ableitung vorkommen können. An drei Beispielen wird das Verfahren ausführlich erläutert.

G. Koehler (Darmstadt).

● **Luckey, Paul:** Nomographie. Praktische Anleitung zum Entwerfen graphischer Rechentafeln mit durchgeführten Beispielen aus Wissenschaft und Technik. 4. Aufl. Durchges. u. verb. v. W. Treusch. (Math.-Physik. Bibl. Reihe 1: Hrsg. v. W. Lietzmann u. A. Witting. Nr. 59/60.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1940. 109 S. u. 57 Fig. RM. 2.40.

Bis auf unwesentliche Veränderungen und eine Erweiterung des Schriftenverzeichnisses unveränderter Nachdruck der dritten Auflage. — An Hand zahlreicher Beispiele aus den Anwendungen wird der Aufbau von Nomogrammen aus den nomographischen Elementen (Funktionsleiter, Netz) gelehrt. Neben den Netztafeln und Fluchtentafeln und aus ihnen zusammengesetzten Tafeln werden insbesondere ein- und zweidimensionale Tafeln mit beweglichen bezifferten Systemen (Flächenschieber, Wanderkurvenblätter) behandelt.

Helmut Heinrich (Breslau).



Pöschl, Th.: Über die Anlage von Fluchtlinientafeln. Z. angew. Math. Mech. 20, 59—61 (1940).

Die Einführung z. B. des Maßstabes  $m_x$  einer im Bereiche  $x_1 \leq x \leq x_2$  darzustellenden Funktion  $f(x)$  durch  $m_x = [f(x_2) - f(x_1)] : X^*$  für die vorgeschriebene Skalenlänge  $X^*$  erleichtert die Anfertigung von Fluchtlinien- und Strahlentafeln für Funktionen der Form  $h(z) = f(x) + g(y) + p(u) + \dots$ . Bedeutet  $a$  den Abstand der Skala  $f(x)$ ,  $b$  den der Skala  $g(y)$  von der Skala  $h(z)$  und  $c$  die gesamte Breite des Fluchtliniennomogramms mit drei parallelen Leitern, so lassen die Beziehungen  $m_z = m_x + m_y$ ,  $a = c \cdot m_y : n$ ,  $b = c \cdot m_x : n$  mit  $n = m_x + m_y$  die mechanische Deutung zu,  $m_x$  und  $m_y$  als parallele Kräfte am Balken  $c$  aufzufassen und entsprechend nach der statischen Methode durch Kraft- und Seileck die Größe und Lage von  $m_z$  zu bestimmen. Diese Deutung bietet die Grundlage für die praktisch recht einfache Ausführung derartiger Nomogramme auch für mehrere Veränderliche. Ein Beispiel zeigt dies.

G. Nehring (Bitterfeld).

Agostini, Amedeo: Sopra gli abachi ad allineamento. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 360—363 (1940).

Die Relation  $\varphi(\alpha)f_1(\gamma) + \psi(\beta)f_2(\gamma) + f_3(\gamma) = 0$  in den drei Veränderlichen  $\alpha, \beta, \gamma$  ist dann und nur dann durch eine Fluchtlinientafel mit drei geradlinigen Leitern, deren zwei (für  $\alpha$  und  $\beta$ ) parallel sind, darstellbar, wenn die Funktionen  $f_1(\gamma), f_2(\gamma), f_3(\gamma)$  linear abhängig sind.

G. Hajós (Budapest).

● Marshall, Charles O.: United States patent office. Nr. 2071416. Toledo, Ohio: Patentschrift: United States Patent Off. 1937. 5 pag.

Die Patentschrift befaßt sich mit einer auf dem Prinzip des logarithmischen Rechenschiebers bzw. der Fluchtlinientafeln mit gekrümmten Leitern beruhenden Anordnung in Verbindung mit einer Waage oder anderen mechanischen Meßgeräten, deren Ausschlag der Meßgröße proportional ist. Die eine logarithmische Leiter ist in Kurvenform, die andere auf einem verstellbaren Metallband aufgetragen, die Ablesung erfolgt am Schnittpunkt der Kurve mit der Teilung. — Die als Beispiel beschriebene Anordnung ist folgende: Bei einer Neigungswaage wird durch die zu wiegende Masse eine dem Gewicht proportionale Drehung einer zylindrischen Trommel bewirkt. Auf der Trommel ist eine logarithmische Kurve aufgezeichnet derart, daß auf den Mantellinien des Zylinders von einer Nulllinie aus die Logarithmen des Ausschlags aufgetragen sind. Über der Trommel ist parallel der Achse ein verschiebbares Metallband mit der zweiten logarithmischen Teilung gespannt. Dreht sich jetzt die Trommel unter der Teilung, so kann man an dem Schnittpunkt der Kurve mit der Skala das Produkt ablesen. Bringt man noch eine weitere logarithmische Teilung parallel der Achse mit verschiebbarer Ablesemarke an, so kann man auch das Produkt dreier Faktoren direkt ablesen. Es wird ausführlich erläutert, wie man die Anordnung zum Wiegen in verschiedenen Maßsystemen, zum Abzählen, zum Bestimmen prozentualer Abweichungen, zur Kostenberechnung u. dgl. Aufgaben verwenden kann.

G. Koehler (Darmstadt).

● Marshall, Charles O.: United States patent office. Nr. 2147304. Toledo, Ohio: Patentschrift: United States Patent Off. 1939. 4 pag.

Diese Patentschrift gibt eine Erweiterung der vorstehend beschriebenen Anordnung für eine Neigungswaage oder ähnliche Geräte, bei denen die Drehung eines Zeigers dem Gewicht usw. proportional ist. Dieser Zeiger wird als Kurve ausgebildet, so daß bei linearer Abhängigkeit der Meßgröße logarithmische Ausschläge erzielt werden. Über den Ausschlagbereich ist wieder ein Metallband mit logarithmischer Teilung verstellbar gespannt, die Ablesung erfolgt am Schnittpunkt der Kurve mit der Skala. Die empirische Bestimmung der Kurvenform des Zeigers wird beschrieben und die Anwendung an ähnlichen Beispielen wie oben erläutert. G. Koehler (Darmstadt).



## Geometrie.

**Grundlagen, Nichteuclidische Geometrie:**

**Petrini, H.:** Précis d'un exposé des principes de la géométrie. Ark. Mat. Astron. Fys. 27 A, Nr 10, 1—17 (1940).

**Toepken, Heinrich:** Zur absoluten Geometrie. Deutsche Math. 5, 85—94 (1940).

Es handelt sich um den sog. Idealfall des Pascalschen Satzes, d. h. um den Satz: „Wenn die Ecken eines Sechsecks sämtlich eigentliche Punkte sind und abwechselnd auf zwei Geraden liegen, wenn ferner zwei Gegenseitenpaare je ein Lot gemeinsam haben und diese Lote sich in einem eigentlichen Punkt  $P$  schneiden, dann hat auch das dritte Gegenseitenpaar ein Lot gemeinsam, das durch  $P$  geht.“ Im § 14 seiner „Grundlagen der Geometrie“ hat Hilbert für die euklidische Geometrie bekanntlich zwei Beweise des Pascalschen Satzes gegeben, die beide durch dreimalige Anwendung je eines Hilfssatzes zum Ziele führen. Hjelmselev hat gezeigt (Math. Ann. 64, 449 ff.), daß der bei dem ersten Hilbertschen Beweis benutzte Hilfssatz auch in der absoluten Geometrie gilt und dort den Idealfall des Pascalschen Satzes liefert, allerdings unter der einschränkenden Voraussetzung, daß  $P$  der Schnittpunkt der Trägergeraden ist. Verf. formuliert nun den beim zweiten Hilbertschen Beweis benutzten Hilfssatz, einen Satz über das Kreisviereck, so um, daß ein in der absoluten Geometrie beweisbarer Satz entsteht, und erhält auf diese Weise einen Beweis des Idealfalles in der absoluten Geometrie. Der umformulierte Hilfssatz ist ein duales Gegenstück zu dem Hessesbergschen Satz über Gegenpaarung, der seinerseits durch eine Dualisierung des Hilfssatzes vom Kreisviereck entstanden war und zu dem sog. Realfall des Pascalschen Satzes führte. — Beim Beweis des vollständigen Pascalschen Satzes in der absoluten Geometrie hat Hjelmselev (Mat.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk. 8, Nr 11; 10, Nr 1) die Zweiteilung in die singulär und die ordinär absolute Geometrie vorgenommen und in der singulären Geometrie nur den Idealfall, in der ordinären Geometrie nur den Realfall verwendet; dabei ist eine gewisse Lücke geblieben, da Hjelmselev nicht nachgewiesen hat, daß die Zweiteilung eine vollständige Disjunktion ist. F. Bachmann hat gezeigt (Math. Ann. 113, 424—451; dies. Zbl. 15, 36), daß man die Hjelmselevsche Zweiteilung vermeiden kann, und daß man allein mit dem Realfall auskommt, und dann in einer gemeinsam mit K. Reidemeister verfaßten Arbeit (Math. Ann. 113, 748—765; dies. Zbl. 15, 312) die Vollständigkeit der Hjelmselevschen Disjunktion bewiesen. Verf. zeigt nun: 1. wie man ohne die Hjelmselevsche Zweiteilung mit Hilfe des Ideal- und des Realfalles zum vollständigen Pascalschen Satz kommt, 2. daß man mit Hilfe des Idealfalles die Vollständigkeit der Hjelmselevschen Disjunktion beweisen kann, 3. daß man allein mit Hilfe des Idealfalles zum vollständigen Pascalschen Satz kommen kann.

Bachmann (Marburg a. d. L.).

**Cassina, U.:** Sul teorema fondamentale della geometria proiettiva ed i principii della geometria. Period. Mat., IV. s. 20, 65—83 (1940).

Beitrag zu einer historisch-kritischen Übersicht über die Grundlegung der projektiven Geometrie unter besonderer Berücksichtigung italienischer Arbeiten (Cassina, Pieri, Severi, Peano). Der Fundamentalsatz wird hier in der Form ausgesprochen: Jede Zuordnung zwischen Gebilden erster Stufe mit 3 verschiedenen Fixelementen  $a, b, c$  fällt mit der Identität zusammen, falls 1. alle  $\infty^2 a$  enthaltenden harmonischen Quadrupel und 2. diejenigen  $\infty'$  harmonischen Quadrupel, deren eines Paar  $c$  enthält, deren anderes Paar  $a, b$  harmonisch teilt, jeweils wieder in Quadrupel vom gleichen Typus übergeführt werden. In der v. Staudtschen Formulierung wurde die Invarianz aller  $\infty^3$  Gruppen harmonischer Quadrupel verlangt [vgl. Cassina, Rend. Ist. Lomb (3) 73 (1940)]. Zum analytischen Beweis dieses Satzes braucht man nicht die Stetigkeit der Geraden in der Dedekindschen Form, wie hier bemerkt wird, sondern nur die Existenz von Punkten, die zwei Paare sich nicht trennender Punkte gleichzeitig harmonisch trennen (vom Verf. als „Postulat des Zirkels“ bezeichnet) und überdies die Möglichkeit, auf der Geraden projektive Koordinaten einzuführen; das letztere geschieht



etwa im Anschluß an Pieri. Es folgen Betrachtungen über die graphischen Axiome (Inzidenz- und Anordnungsaxiome) etwa in der Formulierung von Pieri und Severi mit einer Kritik der jeweils gewählten Grundbegriffe in Beziehung zu der Methodik von Pasch. Die Ergänzung der graphischen Axiome durch Hinzunahme von Stetigkeits- oder Kongruenzaxiomen zum Aufbau der projektiven Geometrie wird anschließend an Hand der Peanoschen Axiome skizziert. *R. Moufang* (Essen, Ruhr).

### **Elementargeometrie, Darstellende Geometrie:**

**Tietze, Heinrich:** Über die mit Lineal und Zirkel und die mit dem rechten Zeichenwinkel lösbaren Konstruktionsaufgaben. I. Math. Z. **46**, 190—203 (1940).

Der Bereich von eindeutig mit Zirkel und Lineal ohne Verwendung von Anordnungsbeziehungen als zusätzliches Hilfsmittel konstruierbaren Elementen wurde bereits früher vom Verf. charakterisiert als Bereich jener Punkte und Geraden, die ohne Zirkel mit dem rechten Zeichenwinkel konstruierbar sind. Das frühere Ergebnis soll jetzt in allgemeinerer Form ausgesprochen werden. Im vorliegenden Aufsatz wird folgendes Kriterium für die Konstruierbarkeit mit dem rechten Zeichenwinkel bewiesen: Zu einer Ausgangsfigur von  $n+1$  Punkten  $A_0, A_1, \dots, A_n$  ( $n \geq 2$ , endlich;  $A_0, A_1, \dots, A_n$  nicht auf einer Geraden) sind mit dem rechten Zeichen-

winkel konstruierbar alle und nur die Punkte  $X(x, y)$  mit  $x = \sum_{v=1}^n \varrho_v a_v$ ,  $y = \sum_{v=1}^n \varrho_v b_v$ ,

wo die  $a_v, b_v$  die Koordinaten der  $A_v$  bez.  $A_0$  sind und die  $\varrho_v$  einem Rationalitätsbereich angehören, welcher erzeugt wird aus allen Quotienten von jeweils zwei inneren Produkten  $p_{\mu\nu} = a_\mu a_\nu$ , wobei  $a_\mu = A_0 A_\mu$ . — Weiter sind mit dem rechten Zeichenwinkel konstruierbar alle und nur die Geraden  $ux + vy + w = 0$ , deren Koeffizienten

bis auf einen gemeinsamen Faktor darstellbar sind in der Form  $u = \sum_{v=1}^n \varrho_v a_v$ ,  $v = \sum_{v=1}^n \varrho_v b_v$ ,  $w = \varrho_0 p_{11}$ . Mit dem rechten Zeichenwinkel konstruierbar heißen dabei

alle Punkte oder Geraden, die entweder zu den Elementen der Ausgangsfigur gehören oder aus diesen durch einen der drei folgenden Konstruktionsschritte erhalten werden können: 1. Verbindungsgerade zweier Punkte; 2. Schnittpunkt zweier nichtparalleler Geraden; 3. Senkrechte zu einer Geraden durch einen Punkt. — Die angegebenen Bedingungen sind unabhängig von der Auszeichnung von  $A_0$  als Bezugspunkt.

*Grunwald* (Göttingen).

**Angelesco, A.:** Sur un théorème de M. D. Pompeiu. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest **9**, 7—8 (1938).

Verf. bemerkt, daß eine Umkehrung des Pompeiuschen Satzes unmittelbar aus einer seiner Lösungen folgt. Es genügt zu diesem Zweck, auf den Seiten eines gegebenen Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$  nach außen bzw. nach innen gleichseitige Dreiecke  $A_j A'_i A_k$  ( $ijk$  heißt eine Permutation von 1, 2, 3) zu konstruieren. Die gemeinsame Länge der Strecken  $A_i A'_i$  ist die Seite eines gleichseitigen Dreiecks  $P_1 P_2 P_3$ , so daß ein Punkt  $P$  existiert mit  $PP_i = A_j A_k$ . (Note des Ref.: Der direkte Pompeiusche Satz gilt auch in der hyperbolischen Ebene [dies. Zbl. **16**, 177], während die obige Umkehrung die Euklidische Ebene kennzeichnet.) *D. Barbilian* (Bucureşti).

**Nicolesco, Miron:** Sur un lemme de M. Pompeiu. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest **10**, 22—26 (1939).

Nach M. Pompeiu gibt es unter vier komplexen Zahlen  $z_1 \dots z_4$  stets mindestens zwei, etwa  $z_1$  und  $z_2$ , derart, daß

$$|z_1 + z_2| > |z_1| \quad \text{und} \quad |z_1 + z_2| > |z_2|$$

ist. Dieser Sachverhalt bedeutet geometrisch die Unmöglichkeit, in der Ebene vier Strahlen zu zeichnen, die miteinander nur stumpfe Winkel bestimmen. In der Abhandlung wird anschließend an diese geometrische Deutung der Satz auf einen  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum erweitert. *U. Graf* (Danzig).

**Goormaghtigh, R.:** Construction des axes d'une conique de centre donné inscrite à un triangle. *Mathesis* 54, 60—65 (1940).

Construction à l'aide d'une interprétation géométrique des fonctions symétriques de trois nombres complexes de module égal à l'unité, donnée par l'auteur [*Mathesis* 53, 72 (1939), ce Zbl. 20, 386]. Quelques lieux géométriques: le lieu des centres des coniques inscrits à un triangle et qui ont une distance focale donnée est une quartique bicirculaire etc.

*O. Bottema* (Deventer, Niederlande).

**Mercuri, Raffaele:** Sul centro di gravità del trapezio. *Esercitazioni Mat.*, II. s. 12, 134—141 (1940).

Verf. beweist durch mechanische und geometrische Betrachtungen die beiden bekannten Sätze: (a) Die Verbindungslinien der Schwerpunkte der beiden Paare von Dreiecken, in welche die Diagonalen die Fläche eines Trapezes teilen, schneiden sich auf der Verbindungslinie der Mitten der parallelen Seiten. (b) Die Verbindungslinie der Mitten der parallelen Seiten eines Trapezes teilt die Verbindungsstrecke der Schwerpunkte der beiden Dreiecke, in die eine Diagonale das Trapez teilt, in Abschnitte, die den Flächeninhalten dieser Dreiecke umgekehrt proportional sind. *Max Zacharias*.

**Cavallaro, Vincenzo G.:** Sulla nota „Pentagono regolare e dodecaedro regolare“ del prof. Vacca. *Boll. Un. Mat. ital.*, II. s. 2, 371 (1940).

Die stereometrische Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks von G. Vacca [*Boll. Un. Mat. Ital.*, II. s. 2, 66—70 (1939); dies. Zbl. 22, 158] ist, wie Verf. hervorhebt, zwar gedanklich höchst einfach, aber nicht praktisch zeichnerisch ausführbar. Verf. weist ferner auf den Unterschied zwischen der Vaccaschen Konstruktion und der von diesem selbst erwähnten von R. de Paolis (*Elementi di Geometria* 1884, 92, 264) hin. Endlich macht er aufmerksam darauf, daß der Satz III von Vacca ein Sonderfall eines allgemeineren Satzes des Verf. ist [V. G. Cavallaro, *Riv. Fis. Mat. Sci. Nat.* 12, Nr 136 (1911)].

*Max Zacharias* (Berlin).

**Auluck, F. C.:** On Poncelet polygons. *Proc. Indian Acad. Sci.*, Sect. A 10, 342—343 (1939).

N. Fuss [*Nova Act. Acad. Sci. Petersburg* 10, 103—125 (1797); 13, 166—189 (1802)] und J. Steiner [*J. reine angew. Math.* 2, 287—292 (1827); Werke I, 159] haben für die Werte  $n = 3$  bis  $n = 8$  die Beziehungen aufgestellt, die zwischen den Halbmessern zweier Kreise und der Entfernung ihrer Mittelpunkte bestehen muß, damit sich in den einen Kreis ein  $n$ -Eck beschreiben läßt, das dem andern umschrieben ist. Nach dem allgemeinen Ponceletschen Schließungssatz (J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, I, 2. éd., § 566, S. 349, 1865) gibt es dann unendlich viele  $n$ -Ecke dieser Eigenschaft. Verf. gibt einfache elementargeometrische Herleitungen der Beziehungen für  $n = 5$  und  $n = 6$ . (In der Überschrift der Abhandlung steht tatsächlich Poncelet!)

*Max Zacharias* (Berlin).

**Storehi, Edoardo:** Una quadratura del circolo notevolmente approssimata. *Period. Mat.*, IV. s. 20, 116—119 (1940).

$AB$  sei ein Durchmesser des Kreises mit dem Mittelpunkt  $O$  und dem Halbmesser 1. Die Halbkreise über  $AO$  und um  $O$  mit dem Halbmesser  $\frac{3}{4}$  schneiden sich in  $D$ . Die Kreise um  $A$  mit  $AD$ ,  $AO$  und  $\frac{7}{4}$  schneiden das in  $A$  auf  $AB$  errichtete Lot in  $F$ ,  $G$  und  $H$ . Der Kreis um  $B$  mit  $BF$  schneide  $HB$  in  $J$ . Das Lot von  $J$  auf  $AB$  treffe  $GB$  in  $L$ . Dann ist  $LB = \sqrt{\frac{355}{113}} \approx \sqrt{\pi}$ , d. h. annähernd gleich der Seite des mit dem Kreise über  $AB$  flächengleichen Quadrats ( $\frac{355}{113}$  ist der bekannte Näherungswert für  $\pi$  von Adriaen Anthonisz aus Metz, gestorben 1607). Der Fehler beträgt nur 0,0000000757... Er ist wesentlich kleiner als die Fehler der bekannten Näherungsquadraturen, deren beste immerhin noch einen Fehler von 0,0000036... besitzt.

*Max Zacharias* (Berlin).

**Delens, Paul:** Sur quelques nouvelles acquisitions de la géométrie du tétraèdre. *J. Math. pures appl.*, IX. s. 18, 303—321 (1939).

Um gewisse Sätze der Dreiecksgeometrie auf das Tetraeder übertragen zu können, wählt Verf. anstatt der Flächenwinkel die folgenden sieben Winkel als Bestimmungsstücke: Die vier Winkel  $J_1, J_2, J_3, J_4$ , welche die Seitenflächen mit der Umkugel bilden, und die drei Winkel  $J_I, J_{II}, J_{III}$ , welche die Umkreise der Seitenflächen miteinander bilden (je zwei gegenüberliegende von diesen Winkeln sind gleich;  $J_I, J_{II}, J_{III}$  sind gleichzeitig die Winkel des



v. Staudtschen assoziierten Dreiecks). Zwischen diesen Winkeln besteht (außer  $J_I + J_{II} + J_{III} = \pi$ ) die Relation

$$\sum (\cot J_2 \cot J_3 + \cot J_1 \cot J_4) / \sin J_{II} \sin J_{III} = 1.$$

Nun werden zwei Brocardsche Winkel definiert durch die Gleichungen

$$\cot X = \sum_{i=1}^4 \cot J_i; \quad \cot \Psi / \cot X = (\sin J_I + \sin J_{II} + \sin J_{III}) / 2 \sin J_I \sin J_{II} \sin J_{III}.$$

Jedem Punkte  $B$ , welcher in bezug auf das Urtetraeder  $A_1 A_2 A_3 A_4$  die baryzentrischen Koordinaten  $x_1 x_2 x_3 x_4$  hat, können zwei Tetraeder ( $A'$ ) und ( $B$ )

$$A'_1(-x_1 x_2 x_3 x_4), A'_2(x_1 - x_2 x_3 x_4), A'_3(x_1 x_2 - x_3 x_4), A'_4(x_1 x_2 x_3 - x_4), \\ B(x_1 x_2 x_3 x_4), B_I(x_1 - x_2 - x_3 x_4), B_{II}(-x_1 x_2 - x_3 x_4), B_{III}(-x_1 - x_2 x_3 x_4)$$

zugeordnet werden, welche mit ( $A$ ) ein desmisches System bilden. Durch die Forderung, daß ( $B$ ) in bezug auf die Umkugel von ( $A$ ) autopolar und ( $A'$ ) der Umkugel eingeschrieben sein soll, wird  $B$  eindeutig festgelegt, und zwar müssen seine Koordinaten den Staudtschen Eckensinussen von ( $A$ ) proportional sein. Dieser Punkt wird als Lemoinescher Punkt von ( $A$ ) erklärt. — Mit Hilfe dieser Begriffe gelingt es, die wichtigsten Sätze über Tuckersche, Schoute'sche Kreise und Brocardsche Gebilde auf das Tetraeder zu übertragen. *E. Egerváry.*

**Egerváry, Eugen:** Über ein räumliches Analogon des Sehnenvierecks. J. reine angew. Math. 182, 122—128 (1940).

Als dieses räumliche Analogon des Sehnenvierecks wird das einer Kugel eingeschriebene Sehnensechsfach mit Diagonalenschnittpunkt erwiesen. In ihm gibt es drei Quadrupel homologer (d. h. die Ecken von Gegenflächen verbindender Kanten), die sich in je einem Punkte treffen, deren Dreieck zusammen mit dem Diagonalenschnittpunkt das orthozentrische Diagonaltetraeder des Sehnensechsfachs bilden. Auf dieses wird als methodisches Hilfsmittel ein baryzentrisches Koordinatensystem gegründet, das, wie sich zeigt, besonders zweckvoll ist und die Analogien zum ebenen Problem besonders klar hervortreten läßt. Als Hauptresultat wird u. a. die folgende Übertragung des Ptolemäischen Satzes auf den Raum bewiesen: „Wenn ein Sechsfach mit Diagonalenschnittpunkt einer Kugel eingeschrieben ist, so ist die Quadratsumme der geometrischen Mittel aus den Quadrupeln homologer Kanten gleich dem Quadrat des geometrischen Mittels aus den vier Körperdiagonalen.“

*Strubecker (Wien).*

**Menzer, G.:** Symbole von Flächen, Kanten und Punkten im hexagonalen System. Z. Kristallogr. A 102, 391—414 (1940).

Es werden für die beiden einzig möglichen Koordinatensysteme, in denen die Symbole aller Flächen einer hexagonalen Form (ebenso: Kanten, Punkte eines solchen Komplexes) sich durch vier Indizeswerte ausdrücken lassen, nämlich:  $\angle X_1 - X_2$ -Achse =  $120^\circ$  bzw.  $60^\circ$ ,  $X_3 \perp X_1, X_2$ , die Indizierungen von Punkten, Kanten und Flächen, die Zonen- und Netzebenengleichung sowie die Transformationsgleichungen zwischen den beiden Systemen entwickelt.

*W. Nowacki (Bern).*

● **Hessenberg, Gerhard:** Ebene und sphärische Trigonometrie. 4. Aufl. (Samml. Götschen Bd. 99.) Berlin: Walter de Gruyter 1940. 171 S. u. 59 Fig. RM. 1.62.

Das nunmehr in vierter Auflage (unveränderter Neudruck) erschienene elementare Lehrbuch der Trigonometrie hat folgenden Inhalt: Einleitung. I. Das rechtwinklige Dreieck. Die trigonometrischen Funktionen beliebiger Winkel. Das schiefwinklige Dreieck. Die Additionstheoreme. Geometrische Anwendungen der Additionstheoreme. Das Viereck. II. Vorbereitungen aus der sphärischen Geometrie. Das rechtwinklige sphärische Dreieck. III. Berechnung und algebraische Anwendung der trigonometrischen Funktionen (Moiressescher Satz, Hilfswinkelmethode). — Die Einordnung der trigonometrischen Funktionen unter den allgemeinen Funktionsbegriff und die Aufnahme weiterer Relationen zwischen den Strecken des Vierecks sind die auffallendsten Veränderungen im Vergleich zu den früheren Ausgaben. Die Behandlung des Stoffes ist einheitlich, nur die zahlreichen mnemotechnischen Regeln einerseits und die ohne Beweis und Anwendung mitgeteilten Potenz- und Produktentwicklungen der trigonometrischen Funktionen andererseits stehen in etwas lockerem Zusammenhang mit dem Ganzen.

*E. Egerváry (Budapest).*

**Gorbunov, B. N.:** Über die graphische Statik von Motoren. Uspechi mat. nauk. 7, 254—267 (1940) [Russisch].

Verf. gibt eine Methode, „Motoren“ (Dynamen) des Raumes auf eine Ebene

abzubilden. Diese Methode besteht in einer Kombination der Methoden von B. Mayor (weiterentwickelt und bekanntgeworden durch R. v. Mises) und von W. Prager für die Abbildung von Raumvektoren auf Stäbe einer Ebene bzw. eines Bündels [vgl. etwa W. Prager, *Z. angew. Math. Mech.* **6**, 341—355 (1926)]. Nach dem Vorgang des Verf. werden nämlich der Vektor des Motors auf einen Stab der Bildebene, das Moment des Motors zunächst auf einen Stab senkrecht zur Bildebene, dieser sodann auf einen Punkt der Bildebene und auf eine als Kote an den Punkt geschriebene Zahl abgebildet. Verf. geht nicht rein graphisch vor, sondern verwendet auch einfache Rechnungen. Das skalare Produkt zweier Motoren, die beiden Invarianten eines Motors sowie der Begriff konjugierter Motoren werden in ihren Beziehungen zu dieser Abbildungsmethode erläutert. Die Brauchbarkeit der Methode zur Lösung auch verwickelterer Aufgaben der räumlichen Statik wird an einigen Beispielen aufgezeigt. *W. Schmid* (Brünn).

**Botez, Mihail St.:** Sur le problème de la projection bicentrale dans un espace à quatre dimensions. *Bull. sci. École polytechn. Timișoara* **9**, 257—272 (1940).

Durch Verschmelzung bekannter Eigenschaften der Zentralprojektion im  $\mathbb{R}_4$  mit früher veröffentlichten — jedoch nicht neuen — Sätzen über das Zweibilderverfahren im  $\mathbb{R}_3$  [Sur la projection bicentrale. *Bull. sci. École polytechn. Timișoara* **5**, 161—188 (1934)], gelangt Verf. zu einer Verallgemeinerung des letzteren auf den  $\mathbb{R}_4$ . Erwähnt werden Darstellung von Punkt und Gerade durch Haupt- und Nebenbilder, Ebene und  $\mathbb{R}_3$  durch Spur- und Fluchtelemente sowie Winkelbeziehungen. — Sehr schlechte Zeichnungen. *H. Horninger* (Berlin).

### Algebraische Geometrie:

**Terheggen, H.:** Zur analytischen Geometrie auf der Geraden von Hermite als Grenzfall der Geometrie in der Hermiteschen Ebene und ihr Zusammenhang mit der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinigung* **50**, Abt. 1, 24—35 (1940).

Es handelt sich um den Zusammenhang der analytischen Geometrie auf der Hermiteschen Geraden und der sphärischen Trigonometrie. Die Punkte auf der Hermiteschen Geraden kann man bekanntlich auf Punkte der reellen Einheitskugel abbilden. Drei Punkte  $x_j, x_k, x_l$  in allgemeiner Lage auf der Hermiteschen Geraden bestimmen auf der Geraden sechs weitere Punkte  $y_j^\pm, y_k^\pm, y_l^\pm$ , deren Bilder auf der Einheitskugel die Pole der durch die Bilder je zweier der Punkte  $x_j, x_k, x_l$  bestimmten größten Kreise sind. Aus den Beziehungen zwischen den durch die Punkte  $x_j, x_k, x_l$  und die Punkte  $y_j^\pm, y_k^\pm, y_l^\pm$  bestimmten Hermiteschen Invarianten kann man die gesamte sphärische Trigonometrie im Sinne von Study ableiten. *O. Borůvka*.

**Brusotti, Luigi:** Sul luogo dei contatti fra coniche di un sistema algebrico  $\infty^1$  dotato di due punti-base. *Boll. Un. Mat. ital.*, II. s. **2**, 200—205 (1940).

**Gherardelli, Giuseppe:** Sulla linea taenodale del sistema  $\infty^1$  di coniche di una quadrica che osculano una cubica sgheмба. *Boll. Un. Mat. ital.*, II. s. **2**, 320—321 (1940).

**Kárteszi, Francesco:** Sopra un sistema di coniche  $\infty^1$  e di indice 4. *Boll. Un. Mat. ital.*, II. s. **2**, 314—320 (1940).

Berzolari (dies. *Zbl.* **22**, 164) hat die Selbstberührungslinie des einparametrischen Systems untersucht, das aus denjenigen Kegelschnitten besteht, die einen vorgegebenen Kegelschnitt  $C$  in einem veränderlichen Punkte oskulieren und durch einen Punkt  $P$  von  $C$  und einen nicht auf  $C$  liegenden Punkt  $Q$  hindurchgehen. An diese Untersuchung knüpfen die drei vorliegenden Arbeiten an. — Brusotti deutet die durch  $P$  und  $Q$  gehenden Kegelschnitte als Bilder der ebenen Schnitte einer Quadrik  $Q$ , auf der  $C$  durch eine räumliche Kubik  $\chi$  und das in Frage stehende Kegelschnittssystem durch das von den Schmiegeebenen an  $\chi$  auf  $Q$  ausgeschnittene Kegelschnittssystem abgebildet werden. Die Selbstberührungslinie (d. h. der Ort der Punkte, in denen sich zwei Kegelschnitte des Systems berühren) ist eine räumliche Kubik auf  $Q$ , die  $\chi$  doppelt berührt. Die Raumkurven 3. Ordnung des Büschels auf  $Q$ , die sich in den gleichen



Punkten berühren, verteilen sich auf Paare einer Involution, wobei jede Kubik des Paares Selbstberührungslinie des Systems der Kegelschnitte ist, die die andere Kubik oskulieren. Es folgt eine Erweiterung auf den Fall eines ebenen einparametrischen algebraischen Kegelschnittsystems mit zwei Basispunkten. — Gherardelli verfolgt den gleichen Gedankengang auf analytischem Wege. Kàrteszi bestimmt statt dessen die Selbstberührungslinie des einparametrischen ebenen Systems der Kegelschnitte, die eine feste Gerade berühren und mit einem vorgegebenen Kegelschnitt eine vierpunktige Berührung eingehen.

*E. Bompiani (Roma).*

**Douglas, Jesse:** A converse theorem concerning the diametral locus of an algebraic curve. *Duke math. J.* 6, 375—388 (1940).

Eine algebraische Kurve  $n$ -ter Ordnung hat nach Newton die Eigenschaft, daß der Schwerpunkt der  $n$  Schnittpunkte mit einer Geraden bei Parallelverschiebung derselben eine Gerade beschreibt. Verf. zeigt, daß dieser Satz die algebraischen Gebilde kennzeichnet. Es gilt nämlich folgendes:  $C_1 \dots C_n$  seien  $n$  Kurvenbögen; die Schwerpunkte der  $n$  Schnittpunkte mit den Geraden aus einer Schar paralleler Geraden seien stets auf einer (i. a. von der Richtung der Schar abhängigen) Geraden gelegen; dann gehören  $C_1 \dots C_n$  einer algebraischen Kurve  $n$ -ter Ordnung an, die natürlich auch zerfallen kann. Ist die von den Schwerpunkten beschriebene Gerade der Richtung nach unabhängig von der Sehnenscharrichtung, etwa  $ax + by = \text{konst.}$ , so hat die algebraische Kurve die Gleichung  $(ax + by)^n + \text{Glieder höchstens } (n-1)\text{-ter Ordnung} = 0$ . Das Ergebnis bleibt auch für  $n$  Hyperflächenstücke  $\sigma_1 \dots \sigma_n$  eines  $R_{m+1}$  gültig, wenn die Schwerpunkte der Schnittpunkte mit jeder parallelen Geradenschar stets eine Hyperebene  $R_m$  erfüllen; dann gehören  $\sigma_1 \dots \sigma_n$  der gleichen algebraischen Hyperfläche  $V_m^n$  an. — Zum Beweis genügt die Annahme, daß die  $C_1 \dots C_n$  bzw.  $\sigma_1 \dots \sigma_n$  darstellenden Funktionen der Klasse  $C^{(n-1)}$  angehören bzw. im komplexen Falle analytisch sind, doch kann, wie ein Beispiel zeigt, diese Voraussetzung wesentlich abgeschwächt werden. — Der Beweis ist einfach; er verwendet die elementar-symmetrischen Funktionen  $\pi_1 \dots \pi_n$  der  $x$ -Koordinaten der Schnittpunkte und stellt für sie Differentialbeziehungen nach den beiden Parametern  $k, c$  der Schnittgeraden  $y = kx + c$  her, nämlich:  $\frac{\partial \pi_i}{\partial k} + \frac{\partial \pi_{i+1}}{\partial c} = \pi_i \frac{\partial \pi_1}{\partial c}; \frac{\partial \pi_n}{\partial k} = \pi_n \frac{\partial \pi_1}{\partial c}$ ; [der in der Arbeit stehende Faktor  $i+1$  bei  $\frac{\partial \pi_{i+1}}{\partial c}$  beruht auf einem Rechenfehler]. Die Voraussetzung bedingt dann  $\pi_1 = \lambda(k) \cdot c + \mu(k)$ , woraus unter Einführung der Größen  $\bar{\pi}_i = \pi_i e^{-\int \lambda(k) dk}$  sich durch Integration der genannten Differentialbeziehungen findet:

$$\bar{\pi}_{n-i} = N_i \varphi^{(i)}(c) k^i + N_{i-1} \varphi_1^{(i-1)}(c) k^{i-1} + \dots + \varphi_i(c),$$

worin die  $N_j$  numerische Vorzahlen, die  $\varphi_j(c)$  Polynome  $(n-j)$ -ten Grades sind. Andererseits ist auf der Kurve:

$$e^{-\int \lambda(k) dk} x^n - \bar{\pi}_1 x^{n-1} + \bar{\pi}_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n \bar{\pi}_n = 0$$

und hierin nach Einführung von  $k = (y - c)/x$  die linke Seite von  $c$  unabhängig, woraus der Satz folgt.

*Harald Geppert (Berlin).*

**Defrise, P.:** Sur certaines involutions sans points multiples appartenant à une courbe algébrique. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 25, 28—32 (1939).

Zwischen den algebraischen Kurven  $\varphi$  und  $f$  bestehe eine  $(1, n)$ -Korrespondenz, bei der den Punkten von  $\varphi$  Gruppen von je  $n$  nicht zusammenfallenden Punkten zugeordnet werden; letztere bilden auf  $f$  eine von mehrfachen Punkten freie Involution  $\gamma_n^1$ , deren Bild  $\varphi$  ist. Zwei Punktgruppen auf  $\varphi$  heißen nach früheren Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 15, 172; 19, 41; 20, 60) bezüglich  $f$  ähnlich, wenn ihre Bilder auf  $f$  äquivalent sind. Ist  $\gamma_n^1$  abelsch, d. h. wird  $\gamma_n^1$  durch eine abelsche Gruppe  $\mathfrak{G}$  birationaler Transformationen von  $f$  in sich erzeugt, so bilden die zu einer vorgegebenen Gruppe auf  $\varphi$  ähnlichen Gruppen  $n$  lineare Vollscharen und insbesondere verteilen sich die zur Nullgruppe ähnlichen Punktgruppen auf  $n$  Scharen, die bezüglich der Addition der

Scharen eine zu  $\mathcal{G}$  isomorphe Gruppe  $\mathfrak{N}$  bilden. Hier untersucht Verf. ein Beispiel nichtabelscher Involutionen;  $\psi$  sei eine Kurve des Geschlechts 3, die eine doppel-punktfreie  $\gamma_2^1$  trägt, deren Bild  $\varphi$  ist;  $\varphi$  sei vom Geschlecht 2; betrachtet werden alle Kurven  $f$  des Geschlechts 7, die eine von mehrfachen Punkten freie, zyklische  $\gamma_3^1$  tragen, deren Bild  $\varphi$  ist. Jede  $f$  trägt also eine  $\gamma_6^1$ , deren Bild  $\varphi$  ist; sie kann, wie Verf. zeigt, je nach der betrachteten Kurve  $f$  abelsch oder nichtabelsch sein und im letzten Falle durch eine Automorphismengruppe von  $f$  erzeugt werden oder auch nicht. In jedem dieser Fälle untersucht Verf. die auf  $\varphi$  bezüglich  $f$  der Nullgruppe ähnlichen Punktgruppen.

Harald Geppert (Berlin).

**Finsler, Paul:** Die eindimensionalen Freigeilde. Comment. math. helv. 12, 254—262 (1940).

Es wird eine Konstruktionsvorschrift gegeben, durch die man alle eindimensionalen Freigeilde erhält. Ein irreduzibles eindimensionales Freigeilde ist eine rationale Normalkurve  $C^\mu$  des Raumes  $L_\mu$ . Ein zusammenhängendes eindim. Freig. besteht aus  $r$  solcher Kurven  $C^{\mu_1}, \dots, C^{\mu_r}$ , die sich in höchstens  $r - 1$  Punkten treffen und so liegen, daß der zugehörige Raum die Dimension  $\sum \mu_i$  hat. Durch Zusammensetzung solcher zusammenh. Gebilde in Räumen freier Lage erhält man alle eindim. Freig. Für die benutzten Begriffe siehe die früheren Arbeiten des Autors über Freigeilde und Freisysteme (dies. Zbl. 19, 325; 22, 78).

van der Waerden (Leipzig).

**Rozet, O.:** Sur la construction d'une surface projectivement canonique. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 25, 670—673 (1939).

$\varphi_{ik}$  bezeichne Linearformen in den homogenen Koordinaten  $x_0, \dots, x_5$  des  $S_5$ . Bringt man zum Ausdruck, daß die Matrix  $[\varphi_{ik}]$  ( $i = 1, 2, 3; k = 1 \dots 4$ ) den Rang 2 haben soll, so erhält man die Gleichungen einer  $V_3^6$ ; ebenso ist die Matrix  $[\varphi_{ik}]$  ( $i = 1 \dots 4; k = 1, 2, 3$ ) in den Punkten einer  $W_3^6$  vom Rang 2.  $V_3^6$  und  $W_3^6$  schneiden sich in einer Fläche  $F$  der Ordnung 14, deren Hyperebenenschnitte ihr vollständiges kanonisches System darstellen, d. h. die projektiv-kanonisch im  $S_5$  ist. Die Geschlechtsszahlen von  $F$  sind  $p_a = p_g = 6$ ,  $p^{(1)} = 15$ . Es gibt im  $S_5$  ein sechsdimensionales Linearsystem von  $V_4^3$ , die durch  $F$  hindurchgehen.

Harald Geppert (Berlin).

**Godeaux, Lucien:** Sur les involutions de genres un appartenant à une surface algébrique. 2. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 25, 308—313 (1939).

In der ersten Note gleichen Titels (dies. Zbl. 20, 59) hat Verf. eine Involution  $J_p$  von Primzahlordnung  $p$  mit nur endlichvielen Deckpunkten auf einer regulären algebraischen Fläche  $F$  des Geschlechts  $p_a = p_g > 1$  betrachtet, deren Gruppen birational auf die Punkte einer Fläche  $\Phi$  mit allen Geschlechtern gleich 1 ( $p_a = p_g = P_2 = \dots = 1$ ) abgebildet werden können. Es ergab sich, daß  $p$  nur 3, 5, 7 oder 13 sein kann. Für  $p = 3$  und 5 kennt man Beispiele solcher Involutionen; hier entwickelt Verf. eines für  $p = 13$ .  $F$  ist die Fläche:  $a_1 x_1^5 + a_2 x_2^4 x_3 + a_3 x_3^4 x_0 + a_4 x_0^4 x_2 + a_2 x_1^2 x_2 x_3 x_0 = 0$  des  $R_3$  mit  $p_a = 4$ ,  $p^{(1)} = 6$ .  $J_{13}$  wird auf ihr durch die Homographie  $H$ :  $x' : x'_2 : x'_3 : x'_0 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^9 x_3 : \varepsilon^3 x_0$  ( $\varepsilon =$  primitive 13-te Einheitswurzel) erzeugt. Als  $\Phi$  kann man die Fläche  $(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_0)^5 + a_5^5 y_1^2 y_2 y_3 y_0 = 0$  verwenden, wobei die Abbildung durch  $y_1 : y_2 : y_3 : y_0 = x_1^3 : x_2^4 x_3 : x_3^4 x_0 : x_0^4 x_2$  vermittelt wird.  $J_{13}$  hat auf  $F$  drei Deckpunkte; jedem derselben folgen in der einen Richtung fünf weitere benachbarte Deckpunkte, von denen der letzte vollkommen ist, während in einer zweiten Richtung zehn benachbarte Deckpunkte folgen, deren letzter wieder vollkommen ist.

Harald Geppert (Berlin).

**Godeaux, Lucien:** Sur les variétés de Segre représentant les points de  $n$  plans. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 25, 8—15 (1939).

Verf. hat schon bewiesen (dies. Zbl. 19, 367), daß die Schnitt- $M_{n-1}$  der Segreschen  $M_n$ , die die Punkte von  $n$  Geraden darstellt, mit einer Quadrik eine kanonische  $M_{n-2}$  der Ordnung Null besitzt und daß die kanonischen  $M_{n-2}$  der Schnitt- $M_{n-1}$  derselben  $M_n$  mit einer Hyperfläche 3. Ordnung von den Hyperebenen auf der  $M_{n-1}$  ausgeschnitten werden. Hier wird allgemeiner die Segresche  $M_{2n-p} \equiv (s_1 s_2 \dots s_p \sigma_{p+1} \dots \sigma_n)$



betrachtet, die die Punkte von  $p$  Geraden  $s_1 \dots s_p$  und  $n - p$  Ebenen  $\sigma_{p+1} \dots \sigma_n$  darstellt ( $0 < p < n$ ). Ein auf das frühere Ergebnis gestütztes Rekursionsverfahren gestattet zunächst, die kanonischen  $M_{2n-p-2}$  auf der Schnitt- $M_{2n-p-1}$  der  $M_{2n-p}$  mit einer kubischen Hyperfläche zu bestimmen. Im Falle  $p = 1$  bilden sie ein Büschel: sie werden auf  $M_{2n-2}$  von den Mannigfaltigkeiten ausgeschnitten, die einen festen Punkt  $S_1$  von  $s_1$  mit beliebigen Punkten von  $\sigma_2 \dots \sigma_n$  darstellen. Es folgt sofort, daß im Falle  $p = 0$  jene kanonischen  $M_{2n-2}$  die Ordnung Null haben und daß die kanonischen  $M_{2n-2}$  der Schnitt- $M_{2n-1}$  von  $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n)$  mit einer Hyperfläche  $m$ -ter Ordnung von den Hyperflächen der Ordnung  $m - 3$  ausgeschnitten werden. Weitere Verallgemeinerungen liegen auf der Hand: so wird die Segresche  $M_{rn}$ , die die Punkte von  $n$  Räumen  $S_r$  darstellt, von einer Hyperfläche der Ordnung  $r + 1$  in einer  $M_{rn-1}$  geschnitten, deren kanonische  $M_{rn-2}$  die Ordnung Null haben. *E. G. Togliatti.*

### Differentialgeometrie:

**Popa, Ilie:** Sugli osculanti di una curva. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 230–233 (1940).

$P$  sei ein gewöhnlicher Punkt einer Raumkurve  $C$ , d. h. nicht Wendepunkt und seine Schmiegungebene  $\pi$  nicht stationär; betrachtet man die durch drei weitere, zu den von  $P$  aus gezählten Bogenlängen  $s_1, s_2, s_3$  gehörige Punkte  $P_1, P_2, P_3$  gelegte Ebene  $\pi'$ , so fragt Verf. nach der Grenzlage  $d$  der Schnittgeraden von  $\pi$  und  $\pi'$  bei  $P_i \rightarrow P$ . Bei völlig willkürlichem Grenzübergang  $s_i \rightarrow 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) fällt  $d$  mit der Tangente  $t$  in  $P$  zusammen. Wird jedoch  $s_1 + s_2 + s_3 = 0$ ,  $s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1 \neq 0$  vorausgesetzt, so ergibt sich in der Grenze eine von  $t$  verschiedene, durch  $P$  hindurchgehende Gerade; setzt man  $s_2 = \varepsilon s_1 + O(s_1^4)$ ,  $s_3 = \varepsilon^2 s_1 + O(s_1^4)$ ,  $\varepsilon^3 = 1$ , so wird  $d$  eine nicht durch  $P$  hindurchgehende Gerade in  $\pi$ .  $d$  kann mit jeder Geraden in  $\pi$  zusammenfallen, wenn man die  $s_i$  geeigneten Bindungen unterwirft. *Harald Geppert.*

**Lense, J.:** Determinazione d'una curva nello spazio euclideo complesso di  $n$  dimensioni. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 227–230 (1940).

$\xi(t)$  bezeichne einen Vektor des euklidischen komplexen  $R_n$ , dessen Komponenten analytische Funktionen von  $t$  sind; es sei  $\xi^{(\mu)} \cdot \xi^{(\nu)} = a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ ,  $a_{\nu\nu} = A_\nu$  und die Determinante  $|a_{ik}| = A \neq 0$  ( $i, k = 1 \dots n$ ), d. h. die durch  $\xi(t)$  beschriebene Kurve  $C$  nicht in einem  $R_{n-1}$  gelegen. Verf. gibt einen neuen Beweis für den Guichardschen Satz, daß durch Vorgabe der  $A_\nu(t)$  die Kurve  $C$  bis auf Bewegungen und Spiegelungen eindeutig gekennzeichnet ist. Zunächst lassen sich nämlich die  $a_{\mu\lambda}$  durch die  $A_\nu$  und ihre Ableitungen in der Form

$$(1) \quad a_{\mu\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{\left[ \frac{\nu-\mu}{2} \right]} \beta_{\lambda, \nu-\mu} A_{\mu+\lambda}^{(\nu-\mu-2\lambda)}, \quad (\mu < \nu)$$

mit rationalen  $\beta$  ausdrücken. Macht man sodann den Ansatz:

$$(2) \quad \xi^{(n+1)} = \sum_{\nu=1}^n b_\nu \xi^{(\nu)}, \quad \text{also} \quad a_{\mu, n+1} = \sum_{\nu=1}^n b_\nu a_{\mu\nu} \quad (\mu = 1 \dots n),$$

so kann man ihm die  $b_\nu$  als Funktionen der  $a_{ik}$  und [wegen (1)] der  $A_i$  entnehmen; geht man damit in (2) ein, so hat man eine lineare, homogene Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung für die Komponenten von  $\xi'$ , mit bekannten Koeffizienten und den Anfangsbedingungen  $\xi^{(\mu)}(t_0) \xi^{(\nu)}(t_0) = a_{\mu\nu}(t_0)$ , ( $\mu, \nu = 1 \dots n$ ), durch die  $\xi'$  bis auf das Vorzeichen eindeutig festgelegt ist. *Harald Geppert (Berlin).*

**Feld, J. M.:** A continuous group of contact transformations containing the generalized pedal transformation. Tôhoku Math. J. 46, 252–260 (1940).

Fällt man von einem Pol  $O$  der Ebene Lote auf die Tangenten einer Kurve  $C$ , dann heißt der Ort  $C'$  der Fußpunkte die Fußpunktkurve (F.P.-Kurve) von  $C$  in bezug auf  $O$ . Die Berührungstransformation (B.T.)  $T$ , welche jeder Kurve  $C$  ihre F.P.-Kurve  $C'$  zuordnet, nennt Lie die F.P.-Transformation (F.P.-Trf.) in bezug auf den Pol  $O$ . Die diskrete Gruppe der Potenzen  $T^n$  ist, wie Lie bemerkt hat, enthalten in der eingliedrigen kontinuier-

lichen Gruppe (1)  $r' = r(\sin \tau)^n$ ,  $\varphi' = \varphi + n\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)$ ,  $\tau' = \tau$ , worin  $n$  der Parameter. Dabei

bedeuten  $r, \varphi$  die auf den Pol  $O$  als Nullpunkt bezogenen Polarkoordinaten eines Punktes und  $\tau$  den Winkel, welchen der Radiusvektor  $r$  mit der Geraden eines Linienelementes bildet, dessen Träger  $(r, \varphi)$  ist. Für ganzzahliges  $n$  stellt (1) die Gleichungen der Potenz  $T^n$  dar. — Verf. erweitert das Ergebnis von Lie nach mehreren Richtungen. Er verallgemeinert den Begriff der F.P.-Trf. in projektivem Sinne, und zwar so, daß auch der Fall der schiefen F.P.-Trf. mit verallgemeinert wird, bei welcher an Stelle der Normalen durch  $O$  auf die Tangenten die Geraden durch  $O$  treten, welche die Tangenten unter einem beliebigen festen Winkel schneiden. Verf. nimmt ein beliebiges Dreieck  $A_1A_2A_3$  als Fundamentaldreieck projektiver homogener Punkt- und Geradenkoordinaten  $x_1, x_2, x_3$  und  $u_1, u_2, u_3$  an.  $(x, u)$  ist ein Linienelement, wenn  $\sum u_i x_i = 0$ ; eine Trf. der Variablen  $x, u$  in  $y, v$  ist eine Element-Trf., wenn sie  $\sum u_i x_i = 0$  in  $\sum v_i y_i = 0$  überführt; sie ist eine B.T., wenn sie außerdem noch  $\sum x_i du_i = 0$  und  $\sum u_i dx_i = 0$  in  $\sum y_i dv_i = 0$  und  $\sum v_i dy_i = 0$  verwandelt. (Verf. verweist bezüglich der Darstellung von B.T. in bihomogenen Koordinaten auf Clebsch-Lindemann. Nach einer Mitteilung von Friedrich Engel ist jedoch die erste einwandfreie Darstellung zu finden bei F. J. Dohmen, Darstellung der B.T. in Konnexkoordinaten. Greifswald: Diss. 1905.) — Ist  $(x, u)$  ( $\sum u_i x_i = 0$ ) ein Element einer Kurve  $C$ , dann gibt es genau einen Punkt  $y$  auf  $u$  derart, daß das Doppelverhältnis (D.V.)  $(\beta'_1 \beta'_2 \beta'_3 u)$  einen gegebenen festen Wert  $-a_2/a_1$  besitzt;  $\beta'_i$  ist die Verbindungsgerade von  $y$  mit  $A_i$ . Der Ort aller Punkte  $y$  heiße  $C'$ . Diejenige B.T.  $\mathcal{C}$ , welche jeder Kurve  $C$  die Bildkurve  $C'$  zuordnet, ist die vom Verf. gefundene verallgemeinerte F.P.-Trf. in bezug auf das Dreieck  $A_1A_2A_3$  und den D.V.-Wert  $-a_2/a_1$ . Die Potenzen  $\mathcal{C}^{-k}$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) haben die Gleichungen

$$(2) \quad \varrho y_i = a_i x_i^{k+1} u_i^k, \quad \sigma v_i = 1/a_i x_i^k u_i^{k-1} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2a) \quad \sum a_i = 0.$$

Bedeutet  $A_1, A_2$  die absoluten Kreispunkte, dann ist  $\log(\beta'_1 \beta'_2 \beta'_3 u)/2$   $i$  der von  $u$  und  $\beta'_3$  gebildete Winkel einer schiefen F.P.-Trf. in bezug auf den Pol  $A_3$ . Für  $-a_2/a_1 = -1$  ergibt sich die gewöhnliche F.P.-Trf. — Läßt man in (2) die Beschränkung von  $k$  auf ganze Zahlen und die Bedingung (2a) fallen, dann stellen die Gleichungen (2) eine dreigliedrige Gruppe  $H$  von B.T. dar. Die Trf. (2) ist das Produkt  $T_k D_{a_i} = D_{a_i} T_k$  der Trf.  $T_k$  und  $D_{a_i}$ , deren Gleichungen sich aus (2) ergeben für  $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 1 : 1$  bzw.  $k = 0$ . Die  $T_k$  bzw.  $D_{a_i}$  bilden eine eingliedrige bzw. zweigliedrige Gruppe ( $T_k T_n = T_{k+n}$ ,  $T_0 = I$ ;  $D_{a_i} D_{b_i} = D_{a_i b_i}$ ,  $D_1 = I$ ). Es gilt also für ganzzahlige  $k$ :  $\mathcal{C}^k = T_{-k}$ . Bezüglich der Trf. (2) besteht die Invarianzbeziehung  $(\beta'_1 \beta'_2 \beta'_3 v) = (\beta_1 \beta_2 \beta_3 u) = -x_2 u_2 / x_1 u_1$ ;  $\beta_i$  bzw.  $\beta'_i$  ist die Verbindungsgerade von  $x$  bzw.  $y$  mit  $A_i$ . — Verf. konstruiert noch eine gemischte Gruppe  $\bar{H}$  von  $2\infty^3$  B.T. als Produkt der Gruppe (2) mit der Schar von  $\infty^1$  B.T.

$$(3) \quad S_k: \quad \varrho y_i = x_i^k u_i^{k+1}, \quad \sigma v_i = 1/x_i^{k-1} v_i^k. \quad (i = 1, 2, 3)$$

Es gilt  $S_k^2 = I$ ,  $S_k S_n = T_{k-n}$ , woraus folgt  $S_n T_k = S_{n-k}$ ,  $T_k S_n = S_{k+n}$ ; ferner ist  $D_{a_i} S_k = S_k D_{1/a_i}$ . — Indem Verf. den Index  $i$  in (2) und (3) von 1 bis  $n$  ( $n > 3$ ) laufen läßt, verallgemeinert er die Gruppen  $H$  und  $\bar{H}$  auf den  $R_n$ . — In der Abhandlung finden sich ferner einige geometrische Anwendungen der Gruppen  $H$  und  $\bar{H}$ . Walter Neumer (Worms).

**Maeda, Jusaku:** On the section of a surface by a variable plane passing through a fixed tangent line. Tôhoku Math. J. 47, 58—68 (1940).

$O$  sei ein regulärer Punkt der Fläche  $F$ ,  $t$  eine durch ihn gehende Tangente, die nicht Haupttangente ist,  $\pi$  eine beliebige Ebene durch  $t$ ,  $S_\pi$  ihre Schnittkurve mit  $F$ . Dreht man  $\pi$  um  $t$ , so beschreibt die Affinnormale von  $S_\pi$  in  $O$  eine Ebene  $T$  (sog. Transon-Ebene), die die zu  $t$  konjugierte Tangentenrichtung  $t'$  enthält; die oskulierende Parabel von  $S_\pi$  in  $O$  beschreibt einen parabolischen Zylinder, der längs  $t'$  die gleiche Berührungsebene  $E$  hat wie  $F$  in  $O$ ; der Brennpunkt dieser Parabel beschreibt einen Kreis, ihre Leitlinie eine Quadrik mit  $E$  als Berührungsebene und Kreisschnittebenen senkrecht zu  $t$  und parallel zu  $T$ . Die oskulierende gleichseitige Hyperbel von  $S_\pi$  in  $O$  beschreibt bei Drehung von  $\pi$  um  $t$  eine Quadrik, die  $E$  in  $O$  berührt und in zwei senkrechten Geraden schneidet; ihr Mittelpunkt liegt in  $T$ , ihre Kreisschnittebenen sind senkrecht zu  $t$  und parallel zu  $T$ ; der Mittelpunkt dieser Hyperbeln beschreibt einen Kreis. Ähnliche Sätze für andere Schmiegekurven an  $S_\pi$ .

Harald Geppert (Berlin).

**Maeda, Jusaku:** On systems of rectangular hyperboloids and orthogonal hyperboloids associated with a point of a surface. Tôhoku Math. J. 47, 24—34 (1940).

Ein Hyperboloid heißt bekanntlich gleichseitig (rectangular) oder orthogonal, je nachdem seine erste oder zweite orthogonale Invariante verschwindet. Eine Fläche  $F$  läßt sich in der Umgebung eines nichtparabolischen Punktes  $O$ , bezogen auf die Haupt-



krümmungsrichtungen und ihre Normale als Achsen, in der Form  $2z = ax^2 + by^2 + \dots$  darstellen. Betrachtet man nun alle orthogonalen Hyperboloide (o. H.), die  $F$  in  $O$  in zweiter Ordnung berühren, so erfüllen ihre Mittelpunkte die Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)z = 0$ ; die entsprechende Frage bei den gleichseitigen Hyperboloiden (gl. H.) führt zur Quadrik  $ax^2 + by^2 + (a+b)z^2 + z = 0$ , alle diese gl. H. gehen durch den Punkt  $0, 0, -2/(a+b)$ . Nun fragt Verf., wann der Pol einer Ebene bezüglich dieser gl. H. wieder ein gl. H. beschreibt; dazu muß die Ebene durch  $0, 0, -1/2(a+b)$  gehen und die den möglichen Ebenen entsprechenden Polörter gehen durch  $0, 0, 1/(a+b)$ ; hingegen beschreibt der Pol einer Ebene bezüglich der betrachteten gl. H. ein o. H. genau dann, wenn die Ebene die Drehfläche  $(a+b)^2(x^2 + y^2) + (a^2 + 3ab + b^2)z^2 + (a+b)z = 0$  berührt. Ähnliche Ergebnisse erhält man, wenn man die Schar der in  $O$  von zweiter Ordnung herrührenden o. H. betrachtet und nach den Bedingungen dafür fragt, daß der Ort der Pole einer Ebene bezüglich derselben ein o. H. oder ein gl. H. sei.

Harald Geppert (Berlin).

**Frank, Alfred:** Beiträge zur winkeltreuen Abbildung des Erdellipsoides. Z. Vermessungswes., Stuttg. 69, 97—112, 145—160 u. 193—204 (1940).

Nach einem ausführlichen geschichtlichen Überblick werden sowohl die allgemeinen Grundlagen der konformen Abbildung von Kugel und Ellipsoid als auch die Herleitung der praktisch wichtigen Karten entwickelt, und zwar mit funktionentheoretischen Mitteln in Fortsetzung der von Riemann und Klein begründeten Richtung. Von den einfach-periodischen Entwürfen werden die stereographische, Mercatorsche und Lambertsche Abbildung, von den doppelt-periodischen Entwürfen die Abbildungen von Adams und Guyou sowie die Peircesche Quinkunktialprojektion eingehend behandelt. Die Herleitung aller dieser Netze erfolgt unter dem einheitlichen funktionentheoretischen Gesichtspunkt und läßt ihren inneren Zusammenhang besonders deutlich hervortreten.

U. Graf (Danzig).

**Hristow, Wl. K.:** Reihenentwicklungen für das Vergrößerungsverhältnis der Gauss-Krügerschen Projektion. Z. Vermessungswes., Stuttg. 68, 605—613 (1939).

Sind  $q, l$  isotherme Parameter auf dem Sphäroid ( $ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi (dq^2 + dl^2)$ ), so wird bei einer konformen Abbildung  $x + iy = f(q + il)$  auf die Ebene das Vergrößerungsverhältnis  $m$  durch  $m^2 = \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} f' \bar{f}'$  gegeben. Verf. verwendet die in seiner früheren Arbeit [Z. Vermessungswes. 63 (1934); dies. Zbl. 9, 48] für die Gauß-Krüger-Abbildung angegebenen Potenzreihenentwicklungen von  $f(q + il)$  und ihrer Umkehrfunktion. Er gibt damit eine Taylorentwicklung von  $m$  im Punkte ( $q = q_0, l = 0$ ) bzw. ( $\varphi = \varphi_0, l = 0$ ) und in der Ebene im Punkte ( $x = x_0, y = 0$ ). Eine zweite Herleitung der Formeln wird dadurch übersichtlicher gestaltet, daß man  $m$  zunächst in einer Variablen längs eines Parallels  $\Delta q = 0$  oder längs der Geraden  $\Delta x = 0$  entwickelt und erst nachträglich  $\varphi$  bzw.  $x$  variiert. Die wie üblich sphärisch gerechneten höchsten Glieder 5. und 6. Ordnung werden durch eine sphärische Rechnung kontrolliert.

Weise (Potsdam-Babelsberg).

**Lehmann, G.:** Über die Lagrangeschen Projektionen. Z. Vermessungswes., Stuttg. 68, 329—344, 361—376 u. 425—432 (1939).

Die Aufgabe, alle diejenigen konformen Abbildungen beliebiger Umdrehungsflächen auf die Ebene zu bestimmen, bei denen die Meridiane und die Breitenparallele der Umdrehungsflächen in der Ebene als Kreise dargestellt werden, wurde zuerst von Lagrange (1781) gelöst. Verf. befaßt sich insbesondere mit den diesbezüglichen Abbildungen des Erdellipsoids auf die Ebene. Im Anschluß an bekannte Eigenschaften dieser Abbildungen wird für diese Abbildungen eine anschauliche geometrische Deutung der Abbildungsverhältnisse, insbesondere auch für das Vergrößerungsverhältnis, gegeben. Aus den von Lagrange aufgestellten geschlossenen Abbildungsgleichungen werden praktische Gebrauchsformeln hergeleitet. Weiterhin wird gezeigt, daß die

Lagrangeschen Projektionen des Ellipsoids auf die Ebene auch als konforme Doppelprojektionen (Ellipsoid-Kugel, Kugel-Ebene) aufgefaßt werden können. Als besondere Abbildungen werden die stereographische Projektion und die Gauß-Krügersche Projektion näher behandelt. Zum Vergleich wird auch die von O. Eggert angegebene stereographische Projektion herangezogen, die azimutal, indessen nicht streng konform ist, wie Verf. ausführlich zeigt.

H. Schmehl (Potsdam).

**Barbilian, D.:** Bemerkung über das „Theorema egregium“. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest **10**, 42—46 (1939).

Nuova dimostrazione del Theorema egregium di Gauss sulla curvatura di una superficie dello spazio iperbolico, fondata sullo spezzamento del  $ds^2$  nel prodotto di due pfaffiani  $Adu + Bdv$ ,  $Cdu + Ddv$ , determinati rispettivamente a meno dei fattori  $e^{P(u,v)}$ ,  $e^{-P(u,v)}$ . Si esaminano le funzioni

$$I = \frac{A_v - B_u}{AD - BC}, \quad J = \frac{C_v - D_u}{AD - BC}$$

e gli operatori

$$(I) = \frac{A \frac{\partial}{\partial v} - B \frac{\partial}{\partial u}}{AD - BC}, \quad (J) = \frac{C \frac{\partial}{\partial v} - D \frac{\partial}{\partial u}}{AD - BC}$$

e si prova che la formazione  $K = 2(I)J + 2(J)I + 4IJ$  è invariante sia per la scelta di  $P$  che per mutamenti di coordinate. Si constata poi che  $K$  è la curvatura gaussiana.

E. Bompiani (Roma).

**Gheorghiu, Gh. Th.:** Sur les surfaces de Tzitzéica. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest **10**, 47—48 (1939).

Eine Tzitzéicasche Fläche ist durch die Relation  $Kd^{-4} = \text{konst.}$  definiert, in der  $K$  das Gaußsche Krümmungsmaß,  $d$  den Abstand der Tangentialebene vom Nullpunkt bezeichnen. Verf. stellt für solche Flächen das System der Gaußschen Gleichungen, bezogen auf die Asymptotenlinien, auf; in sie geht neben der verbleibenden Fundamentalgröße 2. Ordnung die Determinante  $(\xi, \xi_u, \xi_v) = \Delta$  ein, die der Gleichung  $\frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial u \partial v} = \Delta - \frac{1}{\Delta^2}$  genügt. Durch dieselben Größen wird der metrische Fundamentaltensor bestimmt.

Harald Geppert (Berlin).

**Efimoff, N.:** Démonstration de l'existence d'une surface localement non déformable. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **27**, 314—317 (1940).

Bezüglich der Verbiegung analytischer Flächenstücke gilt der Satz, daß die Umgebung eines elliptischen oder hyperbolischen Punktes eine stetige Verbiegung zuläßt; dasselbe gilt für parabolische Punkte, wenn dort die Berührungsebene die Fläche in erster Ordnung tangiert. Verf. konstruiert hier Beispiele von Flächen mit parabolischen Punkten, bei denen keine Umgebung existiert, die eine stetige Verbiegung zuläßt. Solcher Art ist z. B. die Umgebung des Nullpunktes auf den Flächen  $z = F_0^{(9)}(x, y) + F^{(10)}(x, y) + F^{(11)}(x, y) + \dots$ , wobei  $F^{(i)}$  ( $i \geq 10$ ) eine beliebige homogene Form  $i$ -ten Grades in  $x, y$ ,  $F_0^{(9)}$  eine besonders konstruierte Form 9. Grades bezeichnen; auch das Paraboloid  $z = x^3 y^6 + x^{10} + y^{10}$  hat diese Eigentümlichkeit. — Die Sätze werden mittels des früher (dies. Zbl. **22**, 166) eingeführten Begriffes der Starrheitsordnung bewiesen.

Harald Geppert (Berlin).

**Radon, Johann:** Über Tsehebscheff-Netze auf Drehflächen und eine Aufgabe der Variationsrechnung. Mitt. math. Ges. Hamburg **8**, Tl. 2, 147—151 (1940).

Verf. bestimmt auf beliebigen Drehflächenzonen äquidistante Netze aus zwei Scharen von kongruenten, durch Drehung auseinander hervorgehenden Kurven. Ist die Zone der Drehfläche durch  $x = r(\sigma) \cos \varphi$ ,  $y = r(\sigma) \sin \varphi$ ,  $z = z(\sigma)$  ( $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ;  $0 \leq \sigma \leq S$ ) und das Netz durch  $u(\sigma, \varphi) = \text{const.}$ ,  $v(\sigma, \varphi) = \text{const.}$  dargestellt, ist ferner  $\sigma$  die Bogenlänge der Meridiankurve, so ergibt sich:

$$(1) \quad u = \alpha \left( \int_0^\sigma \frac{r^2 - \alpha^2 + \beta^2}{rW} d\sigma - \varphi \right), \quad v = \beta \left( \int_0^\sigma \frac{r^2 + \alpha^2 - \beta^2}{rW} d\sigma + \varphi \right),$$



wo  $W = \sqrt{(\alpha + \beta + r)(\alpha + \beta - r)(\alpha - \beta + r)(\beta - \alpha + r)}$ ;  $W, \alpha, \beta$  können positiv angenommen werden. Durch die Formeln (1) wird die Zone auf ein schlichtes Gebiet der  $u, v$ -Ebene („Netzebene“) abgebildet. Läßt man  $\varphi$  variieren, so ist das Bildgebiet der durch

$$(2) \quad 0 \leq \frac{u}{\alpha} + \frac{v}{\beta} \leq 2 \int_0^S \frac{r d\sigma}{W} = 2K$$

definierte Streifen der Netzebene. Verf. geht nun umgekehrt von dem durch (2) definierten Streifen der Netzebene aus; die Konstanten  $\alpha, \beta, K$  bestimmen einen „Tchebyscheff-Schlauch“, der durch (1) auf eine beliebige Drehflächenzone mit bestimmter „Breite“  $S$  abgebildet wird. Er betrachtet den Sonderfall  $\alpha = \beta$ , wo die beiden Kurvenscharen des Netzes von zu den Meridiankurven symmetrisch gelegenen Kurven gebildet werden, die Meridiankurven also mit den Netzkurven ein Dreiecksnetz bilden, und zeigt, daß die Forderung eines möglichst großen  $z(S)$  bei vorgegebenem  $r(0), z(0), r(S)$ , die auf eine einfache Variationsaufgabe führt, Drehflächen konstanter negativer Krümmung ergibt.

Volk (Würzburg).

**Mihailescu, Tiberiu: Un théorème sur les réseaux de Jonas, analogue à celui de M. Demoulin sur les réseaux  $R$ .** Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 25, 200—205 (1939).

On sait que si une surface possède un réseau de Jonas, le réseau harmoniquement associé en est aussi un; les réseaux de Jonas s'associent donc en doublets. L'A. démontre que si une surface admet deux doublets de Jonas, elle en admet en général une infinité; les surfaces en question jouissent ainsi d'une propriété analogue à celle que M. Demoulin a démontré pour les réseaux  $R$ . Il est montré ensuite que si la surface est isothermo-asymptotique elle admet en général une double infinité de doublets de Jonas et une double infinité de réseaux  $R$  distincte de la première. Dans le cas particulier où la surface de la catégorie est isothermo-asymptotique et admet une déformation projective en elle même il n'y en a qu'une simple infinité de doublets de Jonas qui sont  $R$  et forment un faisceau.

Al. Pantazi (Bucarest).

**Weitzenböck, R.: Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen im  $R_4$ .** 1. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 43, 440—448 (1940).

Sind die 10 Plückerschen Linienkoordinaten  $a_{ik}$  einer Geraden des  $R_4$  in analytischer Weise von einem Parameter  $t$  abhängig,  $a_{ik} = a_{ik}(t)$ , so beschreibt sie eine Regelfläche  $F$  des  $R_4$ . Die Arbeit stellt für die Untersuchung der projektiv-invarianten Eigenschaften der Umgebung eines allgemeinen Punktes von  $F$  mittels der Methode der Komplexsymbole eine Reihe grundlegender Formeln auf und kennzeichnet die wichtigsten projektiven Typen der Regelflächen  $F$  durch insgesamt fünf Differentialkomitanten. Sie kommt so zur Unterscheidung der Flächen  $F$  in nichtabwickelbare und abwickelbare Flächen (d. s. solche, deren benachbarte Erzeugenden sich schneiden). Beide Grundtypen können entweder einem  $R_4$  oder einem  $R_3$  angehören. Die abwickelbaren insbesondere können dabei eine Torse oder ein Kegel sein oder aus den Tangenten einer ebenen Kurve bzw. den Geraden eines ebenen Strahlbüschels bestehen.

Strubecker (Wien).

**Blaschke, Wilhelm: Contributi alla geometria proiettiva complessa.** Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 309—314 (1940).

L'A. étudie, du point de vue de la géométrie projective différentielle, les variétés à deux paramètres réels  $V_{II}$  du plan complexe. En précisant: l'A. considère la condition afin que une droite, qui passe par un point  $X$  de  $V_{II}$ , rencontre  $V_{II}$  en trois points infiniment voisins et donne une forme différentielle cubique réelle invariante  $\Gamma$ : la forme quadratique apolaire de  $\Gamma$  donne une forme quadratique invariante. La chaîne tangente en  $X$  à  $V_{II}$  et celles tangentes dans les points infiniment voisins passent par trois chaînes  $C_I$  de points à un paramètre réel (les  $C_I$  „compagne“ de  $X$ ) intimement liées avec la forme  $\Gamma$ .

Mario Villa (Bologna).

**Bortolotti, Enea: Cinematica e geometria.** Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 241—269 (1940).

Die Arbeit gibt in Erweiterung eines in Florenz gehaltenen Vortrages nach einer ausführlicheren historischen Einleitung eine treffliche Übersicht über die vor allem an den Namen E. Study geknüpften Zusammenhänge der Kinematik der Ebene und des Raumes mit den verschiedenen Zweigen der Geometrie. Im einzelnen geht sie aus von der sogenannten kinematischen Abbildung von W. Blaschke, durch welche die ebenen Bewegungen und Umlegungen auf die Punkte und Ebenen eines projektiven Raumes von quasielliptischer Struktur abgebildet werden. Die Grundzüge dieser quasielliptischen Geometrie werden entwickelt und kinematisch gedeutet. Die von Blaschke gegebenen Zusammenhänge der Differentialgeometrie des quasielliptischen Raumes mit der Geometrie ein- und mehrfacher kontinuierlicher Bewegungen werden nur angedeutet. — Es folgt eine Übersicht über die analytische Behandlung der Bewegungen der Ebene, des Bündels und des Raumes, wobei Quaternionen, Spinoren des  $R_3$ , duale Zahlen, das Studysche Übertragungsprinzip und Studys Biquaternionenformel herangezogen werden und stets neben den analytischen Apparat die möglichen geometrischen Übertragungen gestellt und durch einige grundlegende Anwendungen ausführlicher dargelegt werden. Hierbei kommen zur Sprache: Studys Deutung der Liniengeometrie („Speer“- und „Strahl“-Geometrie) mittels der dualen Kugel und der dualen elliptischen Ebene, Studys Deutung der räumlichen Kinematik als projektive Geometrie einer  $Q^2$  des  $R_7$ , wobei als Anwendung u. a. eine vom Verf. herrührende einfache geometrische Deutung einer Bricardschen analytischen Charakterisierung des linearen Somenpentakomplexes (pentasérie linéaire) von de Saussure eingestreut ist, schließlich Studys Auffassung der räumlichen Kinematik als elliptische Geometrie eines dualen  $R_3$ . — Der letzte Abschnitt ist der projektiven Geometrie der Somen gewidmet, insbesondere Studys projektiven Somentransformationen und seiner Klassifikation der linearen Somenmannigfaltigkeiten (insonderlich Ketten). Ausführlicher besprochen wird E. Cartans neue projektive Geometrie der Bewegungen auf einer reellen Geraden:  $z = f(t)$ , in die auch die Zeit  $t$  eingeht, bei der die Schwarzsche Ableitung  $\alpha(t) = \{z, t\}$  als Beschleunigung fungiert. Hier existiert, wie Verf. bemerkt, ein einfacher Zusammenhang zur affinen Kurventheorie: Die Bestimmung einer Bewegung auf der Geraden durch ihre projektive Beschleunigung unterscheidet sich nicht wesentlich von der Bestimmung einer Kurve der affinen Ebene durch ihre natürliche Gleichung. — Ein recht ausführliches, aber nicht ganz vollständiges Literaturverzeichnis von 90 Nummern ist angefügt.

K. Strubecker (Wien).

**Garnier, René: La formule de Savary et la construction de Bobillier en géométrie plane hyperbolique.** Bull. Sci. math., II. s. 63, 279—300 (1939).

Nach einer Einleitung in die Kinematik der hyperbolischen Ebene, wobei insbesondere das Gesetz für die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten und das Analogon der Formel von Coriolis abgeleitet werden, stellt Verf. das Analogon der Formel von Euler-Savary für die Krümmung einer Bahnkurve bei hyperbolischer Bewegung auf. Entsprechend den verschiedenen Lagemöglichkeiten des Momentanzentrums  $J$  und der gemeinsamen Tangentenrichtung  $\tau$  der Polkurven daselbst zum Klein-Cayleyschen Maßkegelschnitt, nimmt diese Formel sechs verschiedene Gestalten an. — Bemerkenswerterweise gilt in allen diesen sechs Fällen der aus der euklidischen Kinematik her bekannte Satz von Bobillier in unveränderter Form: Sind  $\mu$  und  $\mu_1$  bzw.  $\mu'$  und  $\mu'_1$  auf zwei Strahlen  $D$  und  $D'$  durch  $J$  gelegene Bahnpunkte und ihre Krümmungsmitten, so treffen sich die Geraden  $(\mu, \mu')$  und  $(\mu_1, \mu'_1)$  auf einer weiteren Geraden  $\Delta$  durch  $J$  so, daß  $(D, D')$  und  $(\tau, \Delta)$  eine symmetrische Involution bilden. Die Punktpaare  $\mu, \mu'$  auf den Strahlen  $D$  gehören dabei einer Projektivität an, deren einziges Doppelement das Momentanzentrum  $J$  ist.

K. Strubecker (Wien).

**Terheggen, Hans: Ein- und zweiparametrische Bewegungsvorgänge starrer Körper im Euklidischen  $R_3$  und ihr Zusammenhang mit der Kurven- und Flächentheorie in einer  $M_6^2$  des quasielliptischen  $R_7$  der gebundenen Biquaternionen.** Mitt. math. Ges. Hamburg 8, Tl. 2, 105—146 (1940).

Die Bewegungen eines Achsenkreuzes (einer Some) bilden eine sechsgliedrige Gruppe, deren Transformationen sich als Produkte aus Drehungen und Schiebungen darstellen lassen. Statt der sechs wesentlichen Somenkoordinaten werden acht eingeführt, zwischen denen zwei Identitäten gelten. Zunächst werden die orthogonalen

dreireihigen Matrizen durch Quaternionen  $a = a_0 + e_1 a_1 + e_2 a_2 + e_3 a_3$  mit  $\sum_0^3 a_i^2 = 1$



dargestellt. Die Drehungen des  $R_3$  ergeben sich als Quaternionenprodukte. Zur Erfassung der Schiebungen wird eine zweite Quaternion  $\alpha$  eingeführt und mit  $a$  zur Biquaternion  $A = a + \varepsilon \alpha$  zusammengefaßt; dabei ist  $\varepsilon$  die duale Einheit mit  $\varepsilon^2 = 0$ . Den gebundenen Biquaternionen, deren Koordinaten die beiden Gleichungen  $\sum a_i^2 = 1$   $\sum a_i \alpha_i = 0$  (oder abgekürzt  $(A, A) = 1$ ) erfüllen, entsprechen eindeutig die Bewegungen des  $R_3$ . Schließlich werden die Punkte, Geraden und Ebenen des  $R_3$  durch duale Quaternionen dargestellt (vgl. E. A. Weiß, Einführung in die Liniengeometrie und Kinetik, Kap. 7, dies. Zbl. 11, 130). — Im zweiten Abschnitt entwickelt Verf. die Differentialgeometrie der einparametrischen Mannigfaltigkeiten  $A_0(s) = a_0(s) + \varepsilon \alpha_0(s)$ . Dabei

ist der Parameter  $s$  so gewählt, daß  $\sum_{i=0}^3 \left( \frac{da_{0i}}{ds} \right)^2 = 1$  ist; außerdem gilt die Identität

$(A_0, A_0) = 1$ . Die Ableitungsgleichungen werden auf ein begleitendes Vierkant bezogen, dessen Biquaternionen  $A_0, A_1, A_2, A_3$  paarweise orthogonal sind. Es treten zwei duale Funktionen auf, die Quasikrümmung  $K$  und die Quasiwindung  $W$ , außerdem die rein duale Funktion  $\omega$ . — Zwei benachbarten Kurvenpunkten in der  $M_6^2$  entsprechen zwei benachbarte Somen in  $R_3$ , die durch eine infinitesimale Schraubung  $P$  mit der Achse  $P_1$  ineinander übergeführt werden. Der Bewegungsvorgang in  $R_3$ , wie er sich einem mit dem bewegten System fest verbundenen Beobachter darstellt, hat als Bild in der  $M_6^2$  die Kurve  $\bar{A}_0$ , die aus  $A_0$  entsteht, indem  $e_1, e_2, e_3$  ihr Vorzeichen ändern.

Zwei benachbarten Punkten von  $\bar{A}_0$  entspricht die Schraubung  $Q$  mit der Achse  $Q_1$ . Die infinitesimalen Drehungen und Schiebungen von  $P$  und  $Q$  werden durch  $\omega ds$  bestimmt. Der Kurve  $A_0(s)$  werden die Regelflächen  $P_1$  und  $Q_1$  zugeordnet. Der infinitesimale Winkel und der kürzeste Abstand zweier benachbarter Erzeugenden dieser Flächen wird durch  $K ds$  gegeben. Schließlich führen die Ableitungsgleichungen der Biquaternionen  $P_1(s), Q_1(s)$  zu einer Deutung von  $W ds$ . Der Schluß dieses Abschnittes ist den Ausnahmefällen gewidmet. — Die Flächentheorie in der  $M_6^2$  wird auf zwei duale quadratische Formen aufgebaut. Der Quotient der Formen gibt das Verhältnis  $\frac{1}{R} = \frac{K}{\omega}$  einer Flächenkurve an. Durch Reihenentwicklung wird für die Um-

gebung eines Flächenpunktes eine Indikatrix bestimmt. In voller formaler Analogie zur elementaren Flächentheorie gelangt Verf. zu zwei Hauptkrümmungen, Krümmungsmaß, mittlerer Krümmung und Krümmungslinien. Auf einer Fläche lassen sich solche reelle Hauptparameter einführen, daß Real- und Dualteil des gemischten Gliedes der ersten Grundform verschwinden. Für diese Parameterlinien wird eine quasi-geodätische Krümmung hergeleitet. — Der Übergang zu den Bewegungen des  $R_3$  wird dadurch gegeben, daß jeder Fortschrittsrichtung in der Fläche  $A(u, v)$  ein Schraubenpaar  $P, Q$  entspricht. Den Tangentenebenen von  $A(u, v)$  werden, wie Verf. beweist, zwei kongruente Zylindroide als Ort der Schraubenachsen  $P, Q$  zugeordnet.

W. Haack (Karlsruhe).

Mutô, Yosio: On some properties of umbilical points of hypersurfaces. Proc. Imp. Acad. Jap. 16, 79—82 (1940).

Let  $g_{\lambda\mu}, g_{ab}, N_{ab}, N^\nu$  be resp. the metric tensor of a  $V_{n+1}$ , the metric tensor of a  $V_n$  in  $V_{n+1}$ , its second fundamental tensor and its normal unit vector. Then a line of curvature of  $V_n$  satisfies the equation  $M_j^{i'} \dot{x}^j = \rho \dot{x}^i(t)$ , where (1)  $M_{ij} = N_{ij} - \frac{1}{n} g_{ij} N_{ab} g^{ab}$ .

A point of  $V_n$  is called a perfectly umbilical point when there is a line of curvature passing through the point in each direction. Differentiating (1) with respect to  $t$  one gets easily that the Weyl conformal curvature tensor of  $V_{n+1}$  vanishes at a point if at that point there exists in each  $(n)$ -direction a hypersurface  $V_n$  with that point as a perfectly umbilical point. Another application of the derivative of (1) is made for a conformally flat  $V_{n+1}$ .

Hlavatý (Prag).

**Levy, Harry:** Conformal invariants in two dimensions. 2. Čas. mat. fys. **69**, 118—127 (1940).

Continuing the investigations of two dimensional conformal invariants (see Zbl. **22**, 397) the author obtains a series of conformal invariants (densities) determined by a one-parameter family of curves on an arbitrary surface. The necessary and sufficient conditions that given one-parameter families of curves be conformally equivalent may be expressed in terms of these invariants. *Hlavatý* (Prag).

**Yano, Kentaro:** Conformally separable quadratic differential forms. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 83—86 (1940).

In uno spazio  $V_n$  di Riemann,  $ds^2 = g_{\lambda\mu} du^\lambda du^\mu$  ( $\lambda, \mu, \nu, \dots = 1, \dots, n$ ) si considerino le  $V_{n-m}$   $u^a = \text{cost.}$  ( $a, b, c, \dots = 1, \dots, m$ ) e le  $V_m$   $u^h = \text{cost.}$  ( $h, k, i, j = m+1, \dots, n$ ) ad esse ortogonali ( $g_{ai} = 0$ ). Condizione necessaria e sufficiente affinché le  $V_{n-m}$  e le  $V_m$  considerate siano totalmente geodetiche è che il  $ds^2$  sia separabile cioè della forma  $ds^2 = g_{ab}(u^c) du^a du^b + g_{jk}(u^i) du^j du^k$  [E. Bompiani, Rend. Circ. mat. Palermo **48**, 124 (1924)]. L'A. si propone un problema analogo nella geometria conforme degli spazi di Riemann. Posto  $B_j^\lambda = \frac{\partial u^\lambda}{\partial u^j}$  e

$$H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} = B_{j;k}^\lambda = \frac{\partial B_j^\lambda}{\partial u^k} + B_j^\mu \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} B_k^\nu - B_i^\lambda \left\{ \begin{matrix} i \\ j k \end{matrix} \right\}$$

ove  $\left\{ \begin{matrix} i \\ j k \end{matrix} \right\}$  sono i simboli di Christoffel relativi al tensore  $\bar{g}_{ik}$  delle  $V_{n-m}$ , sono componenti di un tensore conforme delle  $V_{n-m}$  le

$$M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} = H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} - \frac{1}{n-m} \bar{g}^{ih} H_{ih}^{\cdot\cdot\lambda} \bar{g}_{jk}$$

[K. Yano, Proc. Imp. Acad. Jap. **15**, 249 e 340 (1939); questo Zbl. **22**, 398]. Una  $V_{n-m}$  si dice totalmente ombelicale quando  $M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} = 0$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché le  $V_m$  e le  $V_{n-m}$  considerate siano totalmente ombelicali in  $V_n$  ( $n-m \geq 2$ ,  $m \geq 2$ ) è che sia  $ds^2 = \rho(u^i) g_{ab}(u^c) du^a du^b + \sigma(u^i) g_{ij}(u^h) du^i du^j$  ( $ds^2$  conformemente separabile). Se  $V_n$  è a curvatura costante, e conformemente separabile, lo è anche ciascuna delle forme  $g_{ab}(u^c) du^a du^b$  e  $g_{ij}(u^h) du^i du^j$ .

*E. Bompiani* (Roma).

**Hombu, Hitoshi:** Grundlage der Geometrie in der Mannigfaltigkeit der Kurvenelemente. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 90—96 (1940).

Längs einer parametrisierten Kurve  $x^i = x^i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  nennt Verf. das Größensystem  $\{x^i, x^{(1)i} = dx^i/dt, \dots, x^{(\nu)i} = d^\nu x^i/dt^\nu\}$  „Linienelement  $\nu$ -ter Ordnung“ und das Größensystem  $\{x^a, z = x^n, x^{(1)a} = dx^a/dz, \dots, x^{(\nu)a} = d^\nu x^a/dz^\nu\}$ ,  $a = 1, 2, \dots, n-1$  „Kurvenelement  $\nu$ -ter Ordnung“. Die Mannigfaltigkeit  $X_n^{(\nu)}$  aller Linienelemente  $\nu$ -ter Ordnung besitzt die Dimension  $(\nu+1)n$ , diejenige  $X_n^{(\nu)}$  aller Kurvenelemente  $\nu$ -ter Ordnung die Dimension  $(\nu+1)n - \nu$ . Zu jedem Linienelement gehört ein Kurvenelement der gleichen Ordnung, umgekehrt gehört zu jedem Kurvenelement eine  $\nu$ -parametrisierte Schar von Linienelementen  $\nu$ -ter Ordnung. Mit Hilfe eines auf A. Kawaguchi zurückgehenden Algorithmus wird die Äquivalenz zweier Linienelemente in bezug auf dasselbe Kurvenelement untersucht. Jede Funktion  $f$  eines Linienelementes läßt sich als Funktion ihres Kurvenelementes darstellen, wenn  $f$  unter allen infinitesimalen Transformationen  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_\nu$  der Gruppe  $G_\nu$  der Parametertransformationen der Kurve (d. h. der von A. Kawaguchi untersuchten obenerwähnten Äquivalenztransformationen) invariant bleibt:  $\Delta_s f = 0$  ( $s = 0, 1, 2, \dots, \nu$ ). Den Linien- und Kurvenelementen analog lassen sich zweierlei Differentialformen definieren und die für die Elemente aufgeworfenen Fragestellungen für die zugeordneten Differentialformen beantworten. Parameterinvariante Eigenschaften in der Geometrie der  $X_n^{(\nu)}$  heißen nach Kawaguchi „intrinsic“. Diese Eigenschaften gestatten stets eine Deutung in  $X_n^{(\nu)}$ . Nach weiteren näheren Untersuchungen der in den Mannigfaltigkeiten



$X_n^{(\nu)}$  und  $\mathfrak{X}_n^{(\nu)}$  bestehenden linearen Systeme [d. h. Größensysteme, welche sich unter den in  $X_n^{(\nu)}$  und  $\mathfrak{X}_n^{(\nu)}$  herrschenden Gruppen linear homogen transformieren] wird die  $\mathfrak{X}_n^{(\nu)}$  durch Angabe eines kovarianten Differentials mit einer Übertragung ausgestattet. Damit kann in der  $\mathfrak{X}_n^{(\nu)}$  eine vollständige Tensorrechnung entwickelt werden.

M. Pinl (Angsburg).

**Kawaguchi, Akitsugu: Die Differentialgeometrie höherer Ordnung. 1. Mitt.: Erweiterte Koordinatentransformationen und Extensoren.** J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ., Ser. I Math. **9**, 1—152 (1940).

Diese (meistens kombinatorisch-) algebraische Arbeit beruht auf dem Begriff der „erweiterten Transformation“, welche folgendermaßen definiert ist:

$$(1) \quad \bar{x}^{(\alpha)a} = x^{(\beta)i} A_{(\beta)i}^{(\alpha)a} \quad (a, i = 1, \dots, N; \alpha, \beta = 0, \dots, M),$$

wo der Kürze halber

$$(2) \quad \text{a) } \bar{x}^{(\alpha)a} = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \bar{x}^a; \quad \text{b) } x^{(\beta)i} = \frac{d^\beta}{dt^\beta} x^i$$

gesetzt worden ist. In bezug auf diese Gruppe werden in üblicher Weise Extensoren definiert [H. V. Craig, Amer. J. Math. **59**, 764—774 (1937); dies. Zbl. **17**, 378]. Die Eigenart der Koeffizienten  $A$  gibt zur Frage Anlaß, ob und wie man aus einem gegebenen Extensor durch Umgruppierung seiner Bestimmungszahlen neue Extensoren (Tensoren) bilden kann oder aber welche Skalarprodukte aus zwei Exvektoren konstruiert werden können (diese Fragen haben keinen Sinn in der „gewöhnlichen“ Geometrie). Der Verf. untersucht mehr als erschöpfend diese Probleme, indem er verschiedene Operatoren angibt, mittels welcher man solche Konstruktionen ausführen kann. Als einer der wichtigsten Sätze, welche beide Fragestellungen betreffen, kann wohl der folgende zitiert werden: Jedes Skalarprodukt aus einem exkontravarianten und einem exkovarianten Tensor erster Stufe ist durch Skalarprodukte (und ihre Ableitungen) der Vektoren darstellbar, welche aus den Extensoren eindeutig folgen. — Auf die Einzelheiten kann hier des Platzmangels wegen nicht eingegangen werden. — Die Arbeit beginnt mit einer historischen Übersicht der Entwicklung der „höheren“ Geometrie von der Finslerschen aus und endet mit einem umfassenden Literaturverzeichnis diesbezüglicher (und anderer) Arbeiten.

Hlavatý (Prag).

**Hashimoto, Hiroshi: On the geometry of a system of partial differential equations of third order.** J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ., Ser. I Math. **8**, 163—172 (1940).

Let us consider a system of partial differential equations

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial u^\gamma} p_{\alpha\beta}^i + H_{\alpha\beta\gamma}^i(x; u, p_\nu^j, p_{\lambda\mu}^j) = 0 \quad \begin{pmatrix} i, j = 1, \dots, n, \\ \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, m, m < n \end{pmatrix}$$

where

$$p_\alpha^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \quad p_{\alpha\beta}^i \equiv \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}.$$

In order to establish the geometry of (1) one must look for the coefficients  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma, \gamma_{\alpha j}^i$  which appear in the covariant derivative i. e.  $D_\alpha V_{\beta i} \equiv \partial_\alpha V_{\beta i} - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma V_{\gamma i} - \gamma_{\alpha j}^i V_{\beta j}$ . Using the method of variation the author shows that when  $H$  in (1) is linear with respect to  $p_{\alpha\beta}^i$ , the coefficients  $\Gamma$  and  $\gamma$  can be perfectly determined from  $H_{\alpha\beta\gamma}^i$ .

Hlavatý (Prag).

**Lotze, A.: Die elementaren Differentialoperationen in der Grassmannschen Vektoranalysis.** Jber. Deutsch. Math.-Verein. **50**, Abt. 1, 79—91 (1940).

Die Arbeit beginnt mit den Grundbegriffen der Grassmannschen Vektorrechnung des affinen  $R_3$  und führt dazu Vektoren, Schilde als Produkte zweier und Spate als Produkte dreier Vektoren ein. Eine Metrik ergibt sich nach Definition von sog. „Ergänzungspfeilen“ zu den Schilden. Damit folgt dann auch leicht die „duale“ und die „Ergänzungs“-Basis zu einer gegebenen Vektorbasis. Mittels dieser Begriffe lassen sich dann die Differentialoperationen grad, div und rot mittels Verjüngungsprozessen statt mit Hilfe des Nablaoperators erklären. Der wesentliche Inhalt der Arbeit ist dann eine Herleitung der bekannten Umrechnungs- und Integralformeln der Vektoranalysis mit Hilfe dieser vom Verf. bevorzugten Schreibweise und Begriffe. *Bureau.*

**Răduleț, Remus:** Zur Theorie der Vektorfelder. Bull. sci. École polytechn. Timișoara **9**, 309—316 (1940).

Der Feldvektor eines bel. Vektorfeldes, dessen Divergenz sich nicht ins Unendliche erstreckt, läßt sich als Funktion der Werte darstellen, die die Divergenz und Rotation in allen Punkten des Feldes annehmen. Verf. zeigt, daß in gleicher Weise die Kenntnis zweier Tensoren  $\bar{S}$  und  $\bar{D}$  zur Bestimmung des Feldvektors  $\bar{F}$  ausreicht. Die drei Vektorkomponenten ( $n = 1, 2, 3$ ) dieser Tensoren sind durch

$$\begin{aligned} \bar{S}_n &= \bar{u}_n \times \text{grad } V \\ \bar{D}_n &= \bar{u}_n \text{div } \bar{F} - \text{grad } (\bar{u}_n \bar{F}) \end{aligned}$$

festgelegt, wobei  $\bar{u}_n$  die Einheitsvektoren und  $V$  die skalare Feldstärke sind. *U. Graf.*

**Schouten, J. A.:** Über Differentialkomitanten zweier kontravarianter Größen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **43**, 449—452 (1940).

Es seien  $P^{\alpha\lambda_1 \dots \lambda_a}$  und  $Q^{\nu\omega_1 \dots \omega_b}$  zwei Affinoren der Valenzen resp.  $a + 1, b + 1$ . Dann ist

$$\begin{aligned} R^{\nu_1 \dots \nu_{a+b+1}} &\equiv \sum_{\mu}^{0 \dots a} P^{\nu_1 \dots \nu_{\mu} | \mu | \nu_{\mu+1} \dots \nu_a} \partial_{\mu} Q^{\nu_{a+1} \dots \nu_{a+b+1}} \\ &+ \sum_{\mu}^{0 \dots a} (-1)^{\mu} P^{\nu_1 \dots \nu_{\mu} | \mu | \nu_{\mu+1} \dots \nu_a} \partial_{\mu} Q^{\nu_{a+1} \dots \nu_{a+b+1}} \\ &- \sum_{j}^{0 \dots b} Q^{\nu_1 \dots \nu_j | \lambda | \nu_{j+1} \dots \nu_b} \partial_{\lambda} P^{\nu_{b+1} \dots \nu_{a+b+1}} \\ &- \sum_{j}^{0 \dots b} (-1)^{a+b+a+b+j} Q^{\nu_1 \dots \nu_j | \lambda | \nu_{j+1} \dots \nu_b} \partial_{\lambda} P^{\nu_{b+1} \dots \nu_{a+b+1}} \end{aligned}$$

ein Affinor der Valenz  $a + b + 1$ . Hier bedeutet  $\partial_{\mu}$  entweder die gewöhnliche oder aber kovariante Ableitung mit den Koeffizienten  $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ , und gleichzeitig bedeutet  $\partial_{\lambda}$  die gewöhnliche oder aber kovariante Ableitung mit den Koeffizienten  $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$ . Der Beweis folgt durch Ausrechnung. Einige Eigenschaften für verschiedene Werte von  $a, b$  werden erörtert. *Hlavatý (Prag).*

### Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

**Katsuura, Sutezo:** Ein neuer Beweis des Vogtschen Satzes. Tôhoku Math. J. **47**, 94—95 (1940).

Der Kurvenbogen  $ACB$  mit stetiger Tangente besitze überall eine Krümmung, liege ganz auf der einen Seite seiner Tangente in  $A$  und sein Krümmungsradius nehme monoton von  $A$  bis  $B$  zu, so daß  $ACB$  ganz auf einer Seite der Sehne  $AB$  liegt; zieht man nach dieser Seite die Tangenten  $t_A, t_B$  in  $A, B$ , so bildet  $t_A$  mit  $AB$  einen größeren Winkel als  $t_B$  mit  $BA$ . Für diesen Satz von Vogt [J. reine angew. Math. **14**, 239—248 (1914)] gibt Verf. einen elementaren Beweis, der sich auf die bekannte Tatsache gründet, daß der Krümmungskreis in  $C$  den Bogen  $AC$  im Innern enthält. *Harald Geppert.*

**Kubota, Tadahiko:** Einige Bemerkungen zu den Eiliniën. Tôhoku Math. J. **47**, 1—5 (1940).

Zunächst beweist Verf. den folgenden Satz: Auf einer Eilinie  $E$  nehme man zwei feste Punkte  $A, B$ , ziehe durch sie zwei beliebige parallele Sehnen  $AA_1, BB_1$  und durch  $A_1, B_1$  wieder zwei beliebige parallele Sehnen  $A_1A_2, B_1B_2$ ; sind dann auch die Sehnen  $AB_2, BA_2$  stets parallel, so ist  $E$  entweder Mittelpunktschneidlinie oder eine Ellipse; der erste Fall tritt ein, wenn die Tangenten an  $E$  in  $A$  und  $B$  parallel sind; Beweis elementar mittels des Pascalschen Satzes. — In Anlehnung an eine frühere Note [Tôhoku Math. J. **44**, 341—342 (1938); dies. Zbl. **18**, 422] beweist sodann Verf. die folgende Verallgemeinerung des Vogtschen Satzes (vgl. auch vorstehendes Referat) auf die relative Kurventheorie: Längs eines Kurvenbogens  $ACB$  wachse der Relativkrümmungsradius von  $A$  bis  $B$  monoton; bildet dann die Sehne  $AB$  mit dem Bogen  $ACB$  eine Eilinie, so bildet der durch  $A, B$  gehende, den Bogen in  $A$  berührende



Relativkreisbogen  $R$  in  $B$  mit der Sehne  $AB$  einen größeren Winkel als der Bogen  $ACB$ . Daraus läßt sich eine Übertragung des Vierecksatzes ableiten: Besitzt eine eckenfreie Eilinie  $E$  überall einen Relativkrümmungskreis, so besitzt die Relativkrümmung auf  $E$  mindestens vier Extrema. *Harald Geppert* (Berlin).

**Kubota, Tadahiko:** Ein Satz über Eilinen. *Tôhoku Math. J.* **47**, 96—98 (1940).  
Einfacher Beweis des folgenden Satzes: Eine Eilinie besitze eine überall stetige Krümmung,  $r, R$  seien ihr kleinster bzw. größter Krümmungsradius; dann liegt der Radius jedes Kreises, der die Eilinie in mindestens drei verschiedenen oder zusammenfallenden Punkten schneidet, zwischen  $r$  und  $R$ . *Harald Geppert* (Berlin).

**Beretta, L., e A. Maxia:** Sui vertici di un'orbiforme e sulle cuspidi della sua curva media. *Boll. Un. Mat. ital.*, II. s. **2**, 216—220 (1940).

$C$  sei eine Eilinie konstanter Breite  $l$  mit dem Krümmungsradius  $\varrho(\tau)$  ( $\tau$  = Stützwinkel). Aus der Beziehung  $\varrho(\tau) + \varrho(\tau + \pi) = l$  folgt unter bloßer Voraussetzung der Stetigkeit von  $\varrho(\tau)$ , daß  $C$   $4n + 2$  ( $n \geq 1$ ) oder unendlichviele Scheitel haben muß. Ist  $C^*$  die von den Mitten der Durchmesser gebildete Kurve, so hat  $C^*$  in den den Zeichenwechselstellen der Funktion  $f(\tau) = \varrho(\tau) - \frac{1}{2}l$  entsprechenden Punkten Spitzen; ist also die Zahl dieser Spitzen endlich, so ist sie ungerade und mindestens gleich 3; einer  $2m$ -fachen Nullstelle ( $m \geq 1$ ) von  $f(\tau)$ , die also einen Scheitel von  $C$  mit dem Krümmungsradius  $\frac{1}{2}l$  bezeichnet, entspricht hingegen auf  $C^*$  eine singuläre Stelle der Krümmung  $\infty$ , nämlich ein  $2m + 1$ -facher Punkt mit lauter zusammenfallenden Tangenten, in dessen Umgebung  $C^*$  durch einen nichtlinearen Zweig der Klasse 1 und Ordnung  $2m + 1$  dargestellt wird. *Harald Geppert* (Berlin).

**Fejes, Ladislas:** Sur un théorème concernant l'approximation des courbes par des suites de polygones. *Ann. Scuola norm. super. Pisa*, II. s. **9**, 143—145 (1940).

Als Abweichung  $\tau_n$  zwischen einer ebenen geschlossenen konvexen Kurve  $C$  und einem geschlossenen  $n$ -Eck  $P_n$  bezeichnet man das Maß der im Innern nur einer der beiden Figuren gelegenen Fläche. Sind  $F$  und  $U$  Fläche und Umfang von  $C$ , so beweist Verf. die Existenz einer Polygonfolge  $P_n$  ( $n = 3, 4, \dots$ ) derart, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \tau_n \leq \frac{\pi^2}{4} F$  ist (das Gleichheitszeichen wird bei einer Ellipse erreicht) und einer weiteren Polygonfolge, so daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \tau_n \leq \frac{\pi}{16} U^2$  (die Gleichheit wird nur beim Kreis erreicht). Die Beweismethode ist ähnlich der früher vom Verf. (dies. Zbl. **20**, 401; **22**, 267) und von E. Sas (dies. Zbl. **20**, 402) angewandten. *Harald Geppert* (Berlin).

**Vincensini, Paul:** Sur une extension d'un théorème de M. J. Radon sur les ensembles de corps convexes. *Bull. Soc. Math. France* **67**, 115—119 (1939).

Der bekannte Radonsche Satz, nach dem eine Gesamtheit  $E$  von konvexen Körpern  $K$  im euklidischen  $R_n$ , in der je  $n + 1$  Körper mindestens einen Punkt gemein haben, ebenfalls mindestens einen Punkt gemein hat, läßt sich auch so aussprechen: Haben in  $E$  je  $n + 1$  Körper von einem festen (mit diesem  $n + 1$ -tupel veränderlichen) Punkte einen  $d$  nicht übertreffenden Abstand, so haben alle Körper aus  $E$  von einem bestimmten festen Punkte einen  $d$  nicht übertreffenden Abstand. Unter Abstand  $P$  zu  $K$  ist das Minimum des Abstandes von  $P$  zu einem Punkte von  $K$  zu verstehen. Verf. beweist, daß der zuletzt ausgesprochene Satz auch dann richtig bleibt, wenn man den Abstand  $d$  im Minkowskischen Sinne unter Zugrundelegung einer beliebigen geschlossenen konvexen Eichhyperfläche des  $R_n$  mißt. Dieser neue Satz ist der folgenden Aussage gleichwertig: Es sei  $\Sigma$  die Gesamtheit der konvexen Körper  $U$ , die aus einem beliebig gewählten konvexen Körper durch Anwendung aller beliebigen Translationen entsteht; gibt es dann zu je  $n + 1$  Körpern  $K$  aus  $E$  einen  $U$  aus  $\Sigma$ , der mit ihnen mindestens einen Punkt gemein hat, so gibt es in  $\Sigma$  einen Körper  $U$ , der mit allen  $K$  aus  $E$  mindestens einen Punkt gemein hat. Der Beweis dieses Satzes läßt sich durch Betrachtung gewisser Linearscharen auf den Radonschen Satz zurückführen.

*Harald Geppert* (Berlin).

**Dinghas, Alexander: Konvexe Rotationskörper im  $n$ -dimensionalen Raum.** Abh. preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1939, 3—26.

$K$  sei ein  $n$ -dimensionaler konvexer Rotationskörper der Maximalbreite  $d$  im  $R_n$ ,  $p(\theta)$  seine Stützfunktion; dann ist sein Volumen

$$V(K) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\pi p(p+p'') (p\sin\theta + p'\cos\theta)^{n-2} d\theta. \quad (1)$$

Ist  $K_h$  der zur Stützfunktion  $p(\theta) + h$  gehörige Parallelkörper, so läßt sich also sein Volumen in der Form

$$V(K_h) = W_0 + \binom{n}{1} W_1 h + \binom{n}{2} W_2 h^2 + \dots + W_n h^n \quad (2)$$

entwickeln, worin die  $W_\nu$  ( $\nu = 0 \dots n$ ) die sog. Quermaßintegrale von  $K$  sind, deren analytischer Ausdruck aus (1) sofort abzuleiten ist. Für sie beweist Verf. die Ungleichungen

$$W_{\nu-1} - 2W_\nu d + W_{\nu+1} d^2 = -Q_{\nu-1} \leq 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots, n-1) \quad (3)$$

$$Q_\nu = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\pi \{p' + (p-d)\tan\theta\}^2 (p\sin\theta + p'\cos\theta)^{n-\nu-2} \sin^\nu\theta d\theta.$$

(Berichtigter Druckfehler!). Durch (3) werden die von Fenchel (dies. Zbl. 15, 120) für allgemeine konvexe Körper bewiesenen Ungleichungen (4)  $W_{\nu-1} W_{\nu+1} \leq W_\nu^2$  ( $\nu = 1 \dots n-1$ ) bei Rotationskörpern verschärft. In (3) verschwinden bei Beschränkung auf konvexe Drehkörper die linken Seiten nur für einen durch Halbkugeln an beiden Enden abgerundeten Kreiszylinder, dem zwei Kappen mit Spitzen auf der Drehachse aufgesetzt sind; die Ungleichungen (4) werden zu Gleichungen bei der Kugel ( $\nu = 1 \dots n-1$ ) oder einer mit zwei Kappen versehenen Kugel, deren Spitzen auf einem Durchmesser liegen ( $\nu = 1 \dots n-2$ ); damit ist ein Teil der Vermutung, daß (4) allgemein nur bei Kappenkörpern der Kugel zur Gleichheit wird, bewiesen. Man kann (3) auch zu anderen Ungleichungen kombinieren; z. B. erhält man in der Ungleichung

$$(n-1)W_0 - ndW_1 + d^n W_n = -\sum_{\nu=1}^{n-1} (n-\nu)Q_{\nu-1} d^{\nu-1} \leq 0$$

eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung von E. Schmidt (dies. Zbl. 20, 373). Eine andere Kombination gestattet den Schluß, daß unter allen konvexen Drehkörpern gegebener Oberfläche die Kugel das kleinste Integral der mittleren Krümmung liefert.

Harald Geppert (Berlin).

**Pasqualini, Louis: Superconvexité.** Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 25, 18—24 (1939).

Ein durch eine Gleichung der Form  $y = f(x)$  darstellbarer Kurvenbogen  $\sigma$  heißt positiv oder negativ überkonvex, wenn die Eichbögen, deren Enden in irgend zwei Punkte  $A, B$  von  $\sigma$  fallen, zu beliebigen  $A, B$  existieren und ganz oberhalb bzw. unterhalb des Bogens  $\widehat{AB}$  von  $\sigma$  verlaufen; ein Punkt  $M$  eines Bogens  $L$  heißt positiv oder negativ überkonvex, wenn die Umgebung von  $M$  auf  $L$  ein positiv oder negativ überkonvexer Bogen ist. Verf. zeigt dann: 1. zwei positiv überkonvexe Bögen  $\sigma_1, \sigma_2$ , die in einem Punkte  $M$  mittels eines positiv überkonvexen Bogens zusammenhängen, bilden einen positiv überkonvexen Bogen; 2. ein nur aus positiv überkonvexen Punkten bestehender Bogen ist positiv überkonvex. — Der zweite Satz wird auf die Flächenkappen  $z = f(x, y)$  ausgedehnt, auf die, ebenso wie auf ihre Punkte, die Begriffe der positiven und negativen Überkonvexität ausgedehnt werden. Weiterhin zeigt Verf., daß der Satz auch dann gültig bleibt, wenn die Punkte der Flächenkappe bis auf eine punktförmige Menge positiv überkonvex sind. Verf. erweitert den Satz auch auf Hyperflächen eines euklidischen Raumes  $R_p$ .

A. Maxia (Firenze)



**Vincensini, Paul:** Sur une généralisation d'une propriété des figures convexes planes. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 25, 69—74 (1939).

Nachdem Verf. den von A. E. Mayer (dies. Zbl. 10, 270) eingeführten Begriff der Überkonvexität erläutert hat, beweist er den folgenden Satz, der die Erweiterung einer bekannten Eigenschaft der konvexen Körper darstellt: Damit ein Gebiet  $F$  mit zusammenhängendem und mit stetiger Tangente versehenem Rand  $C$  bezüglich einer vorgegebenen Eichkurve überkonvex ist, ist notwendig und hinreichend, daß jede durch irgendeinen inneren Punkt von  $F$  gelegte Eichkurve  $C$  in zwei und nur in zwei verschiedenen Punkten trifft.

A. Maxia (Firenze).

**Sz. Nagy, Gyula v.:** Über die Eigenschaften der beschränkten ebenen Kurven ohne Tangentensingularität. Math. Z. 46, 605—626 (1940).

Es handelt sich um die gestaltliche Untersuchung der ebenen beschränkten Kurven  $K$ , ohne Tangentensingularität mit  $r$  Rückkehrpunkten 1. Art (Kurve = eindeutiges, stetiges Kreisbild in der projektiven Ebene mit stetiger [aber nicht überall scharfer] Tangente und ohne Teilstrecken). Es wird gezeigt: 1. Die  $K$ , sind unter den (ebenen) Kurven dadurch gekennzeichnet, daß sie in jeder Richtung genau eine bzw. genau zwei verschiedene einfache Tangenten besitzen, und zwar ist dabei  $r$  eine ungerade bzw. gerade Zahl. Für ungerades  $r$  sind die  $K$ , identisch mit den vom Verf. früher [Math. Z. 41, 479—492 (1936); dies. Zbl. 14, 326] untersuchten „Buschenveloppen  $B_r$ “ von H. Brunn. In der hier zu besprechenden Arbeit werden die  $K$ , für gerades  $r$  untersucht und mit  $C_r$  bezeichnet. — 2. Als Komponente von  $C_r$  werde jeder größte, keine Rückkehrpunkte im Innern enthaltender Teilbogen von  $C_r$  bezeichnet. Dann gilt: Unter den  $r$  Komponenten von  $C_r$  besitzen mindestens  $(r - 1)$  die Ordnung zwei und die etwa übrige die Ordnung drei. (In bezug auf ein beliebiges Parallelenbüschel besitzen  $(r - 2)$  bzw.  $(r - 1)$  der Komponenten die Ordnung 1 und die übrigen die Ordnung 2 bzw. 3.) Höchstens eine Komponente besitzt einen, und dann genau einen, Doppelpunkt. Zwei benachbarte Komponenten schneiden einander (und dann in genau einem Punkte) nur, wenn die eine der Komponenten einen Doppelpunkt besitzt. Zwei nicht benachbarte Komponenten schneiden einander in höchstens zwei Punkten. — 3. Für die Ordnung  $n$  und die Klasse  $m$  von  $C_r$  gilt:  $m \leq n \leq r + 2$ ; für jedes gerade  $r$  gibt es  $C_r$  mit  $m = n = r + 2$  und mit  $m = 4$ . Für die Anzahl  $d$  der Doppelpunkte von  $C_r$  gilt  $d \leq \binom{r}{2}$ ; ferner  $\frac{r}{2} \leq d$ , falls eine Komponente einen Doppelpunkt besitzt; für jedes gerade  $r$  gibt es  $C_r$  mit  $d = \binom{r}{2}$  sowie mit  $d = \frac{r}{2}$ . — 4. Zwei Kurvenpunkte mit parallelen Tangenten heißen konjugiert, ebenso zwei Teilbogen, deren Punkte paarweise konjugiert sind.  $C_r$  zerfällt in  $2z$  paarweise konjugierte Konvexbogen mit  $r \leq 2z \leq 2r$ . Es gilt  $d \leq \frac{r(r-3)}{2} + z = \binom{r}{2} - q$ , wo  $2q$  die Anzahl solcher Rückkehrpunkte von  $C_r$  ist, welche paarweise konjugiert sind. — 5. Beim Durchschneiden eines Doppelpunktes zerfällt  $C_r$  in eine  $B_{r_1}$  und eine Kurve, welche eine  $C_{r_2}$  ist mit  $r_1 + r_2 = r + 1$ , falls sie keine Doppeltangente besitzt. — 6. Der Klassenindex einer  $C_r$  ist 0 oder 2. — 7. Als Randbogen werden diejenigen konvexen Teilbogen von  $K$ , bezeichnet, welche der Begrenzung des von der  $K$ , bestimmten, den uneigentlichen Punkt enthaltenden Gebietes angehören. Während für die  $B_r$  alle Randbogen nach außen konkav sind, gibt es bei den  $C_r$  auch nach außen konvexe. Haupt.

**Mirguet, Jean:** Sur les paratingentes de rang strictement pair des orthosurfaces. C. R. Acad. Sci., Paris 210, 33—35 (1940).

Unter einer Paratingente der Mindestordnung  $k$  in einem Häufungspunkt  $P$  der Punktmenge  $M$  (des  $R_3$ ) verstehe man jeden Limes einer Folge von Geraden  $g_r$ , so daß schließlich alle  $g_r$  mit einer beliebig kleinen Umgebung von  $P$  auf  $M$  mindestens  $k$  Punkte gemeinsam haben. Eine Paratingente der Mindestordnung  $k$ , welche nicht zugleich (als) Paratingente einer Mindestordnung  $> k$  (darstellbar) ist, heiße von der genauen Ordnung  $k$ . In Fortführung früherer Untersuchungen [Acta math. 68, 293 bis

300 (1937); dies. Zbl. 17, 328] zeigt Verf.: Besitzt ein Flächenstück  $F$  des  $R_3$  in jedem Punkte  $P$  eine endliche Anzahl von Paratingenten der Mindestordnung Drei, so existieren in jedem Punkt von  $F$ , abgesehen höchstens von einer abzählbaren Ausnahmemenge, höchstens zwei Paratingenten, deren genaue Ordnung eine ungerade Zahl ist.  
Haupt.

**Santaló, L. A.: Integralgeometrie. XXXI. Über Mittelwerte und geometrische Wahrscheinlichkeiten.** Abh. math. Semin. Hansische Univ. 13, 284—294 (1940) [Spanisch].

Die Ebene sei durch kongruente, sich nicht überdeckende Bereiche gleichmäßig aufgeteilt. Jeder Bereich enthalte einen Kurvenzug. Alle zu den verschiedenen Bereichen gehörenden Kurvenzüge seien einander kongruent. Verf. stellt und beantwortet die Frage nach dem Mittelwert der Anzahl der Punkte, die eine bewegliche Kurve fester Gestalt mit dem so erhaltenen, die Ebene überdeckenden Netz gemein hat. Wenn die Anzahl der Schnittpunkte der Kurve mit dem Netz nur zwei verschiedene Werte annehmen kann, läßt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß einer dieser beiden Werte angenommen wird, sofort explizit angeben. Im zweiten Teil der Arbeit behandelt Verf. folgende Frage: Die Ebene sei wieder in der oben erwähnten Art in kongruente Bereiche zerlegt. Jeder Bereich enthalte die gleiche Anzahl von Punkten, die auch in allen Bereichen in der gleichen Weise verteilt sein sollen. Wie groß ist der Mittelwert der Anzahl der Punkte, die ein Bereich fester Gestalt mit diesem Punktsystem gemein hat? Wenn für diese Anzahl wieder nur zwei Möglichkeiten bestehen, läßt sich die Wahrscheinlichkeit für eine dieser beiden angeben. Knothe.

**Santaló, L. A.: Géométrie intégrale. XXXII. Quelques formules intégrales dans le plan et dans l'espace.** Abh. math. Semin. Hansische Univ. 13, 344—356 (1940).

Verf. geht aus von der bekannten Poincaréschen Formel für die kinematische Dichte eines mit einer beweglichen Kurve starr verbundenen Achsenkreuzes, die eine feste Kurve schneidet. Als Parameter werden dabei die Bogenlängen auf beiden Kurven und der Winkel der Tangenten in einem Schnittpunkt verwandt. Es werden Integralformeln hergeleitet, in denen die kinematische Dichte multipliziert wird mit Funktionen der Bogenlängen einer oder beider Kurven. Die Integrale werden natürlich immer über alle Lagen der beweglichen Kurve erstreckt, in denen die beiden Kurven Punkte gemeinsam haben. Analoge Betrachtungen werden angestellt über eine bewegliche Fläche, die eine feste Kurve schneidet (oder umgekehrt). Im dritten Teil der Arbeit wird eine Formel hergeleitet für das Produkt der kinematischen Dichten zweier Achsenkreuze, die mit zwei beweglichen, eine feste Fläche schneidenden Flächen starr verbunden sind. In dieser Formel treten die Oberflächendichten (Oberflächenelemente) der drei Flächen, die Drehdichten um die Normalen in einem Schnittpunkt und gewisse Winkel des sphärischen Dreiecks auf, das von den Tangenten an die Schnittkurven in einem Schnittpunkt gebildet wird. Anschließend werden bemerkenswerte Integralformeln hergeleitet. Das Produkt der beiden kinematischen Dichten wird dabei wieder multipliziert mit Oberflächenfunktionen auf den drei Flächen oder wie in einer besonderen Formel mit dem Flächeninhalt des erwähnten sphärischen Dreiecks. Knothe.

**Rohde, Hildegard: Integralgeometrie 33. Unitäre Integralgeometrie.** Abh. math. Semin. Hansische Univ. 13, 295—318 (1940).

Verf. entwickelt die Grundtatsachen der Integralgeometrie in einer elliptischen Hermiteschen Ebene mit der Grundform  $(\bar{x}\bar{y}) = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3$ . — Im ersten Paragraphen werden die Ausdrücke für die Dichten der Punkte, der Geraden, der ein- und zweidimensionalen Normalketten nach dem Vorbild von Blaschke (dies. Zbl. 21, 263) angegeben. Es ist z. B. die Geradendichte  $\mathfrak{G} = (\bar{x}\bar{y})(\bar{x}\bar{z})(\bar{y}\bar{z})(\bar{y}\bar{z})$ . Hierin sind  $\bar{x}, \bar{y}$  zwei orthogonale  $[(\bar{x}\bar{y}) = 0]$  auf der Geraden  $\mathfrak{G}$  gelegene Punkte,  $\bar{z}$  der Pol von  $\mathfrak{G}$ ; die Koordinaten sind (bis auf einen beliebigen unimodularen Faktor) durch die Forderung  $(\bar{x}\bar{x}) = 1$  normiert; die Punkte bezeichnen Differentiale und das Produkt ist alternierend zu nehmen. Als Anwendung berechnet man das Maß der Menge aller eine zweidimensionale Kurve  $\mathfrak{C}$  treffenden Geraden unter den Annahmen: 1. daß jede



Gerade  $+1$  oder  $-1$  Male in jedem ihrer Schnittpunkte mit  $\mathfrak{C}$  gezählt wird, wobei vorher eine invariante Orientierung des Schnittpunktes zweier orientierten zweidimensionalen Flächenelemente eingeführt wird; 2. daß jede Gerade soviel mal gezählt wird, als die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit  $\mathfrak{C}$  angibt. Auf diese Weise ergeben sich zwei Invarianten  $J$  und  $H$  der Kurve  $\mathfrak{C}$ . Weiter findet man das Maß  $K$  aller zweidimensionalen Normalketten, die  $\mathfrak{C}$  schneiden (ohne auf die Orientierung der Schnittpunkte zu achten). — Im zweiten Paragraphen werden sog. Croftonsche Formeln abgeleitet für das Produkt der Dichten zweier gleich- oder ungleichartiger der folgenden Elemente: Punkt, Gerade, ein-, zweidimensionale Normalkette. — Im dritten Paragraphen führt man die kinematische Dichte in der betrachteten Ebene ein. Sie wird auf der Menge aller Lagen einer beweglichen zweidimensionalen Kurve  $\mathfrak{C}$  integriert, die eine feste zweidimensionale Kurve  $\mathfrak{C}_0$  schneidet; die gefundenen Simultaninvarianten von  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{C}_0$  (es ergeben sich nämlich verschiedene Resultate, je nachdem die Orientierung der Schnittpunkte von  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{C}_0$  beachtet wird oder nicht) drücken sich einfach durch die früher eingeführten Invarianten  $J, H, K$  von  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{C}_0$  aus; die Formel ist ein Analogon zu einer von Poincaré aufgestellten Formel. — Schließlich werden einige Seitenstücke zu Formeln von Santaló angegeben. *B. Petkantschin* (Sofia).

### Topologie:

**Charpentier, Marie:** Sur certaines courbes fermées et leurs bouts premiers. *Bull. Sci. math.*, II. s. **63**, 303—307 (1939).

Bei Untersuchungen über Birkhoffsche Kurven hat Verf. gewisse irreduktible Schnitte der Ebene behandelt, die mit einem ihrer Primenden identisch sind. Die Arbeit ist hauptsächlich diesem Begriff gewidmet. (Dabei heißt, nach Kuratowski, eine ebene geschlossene Menge ein irreduktibler Schnitt, wenn sie die Ebene zerschneidet, ohne daß dieses der Fall für eine ihrer echten Untermengen sei.) Nach mehreren Hilfssätzen kommt Verf. zu folgendem interessanten Ergebnis: Wenn eine Kurve mit einem ihrer Primenden identisch ist, so ist die Kurve ein unzerlegbares Kontinuum oder sie ist die Summe von zwei Komplementärbögen, von denen jeder ein unzerlegbares Kontinuum ist. *S. Stoilow* (Bukarest).

**Veress, P.:** Über nichtebene Graphen. *Mat. fiz. Lap.* **47**, 34—46 u. deutsch. Zusammenfassung 47 (1940) [Ungarisch].

Verf. gibt einen sehr übersichtlichen Beweis des Kuratowskischen Satzes [Fundam. Math. **15**, 271 (1930)], nach welchem jeder nicht plättbare Baum im kleinen eine der beiden schon früher bekannten Kurven [vgl. D. König, *Math. termézet.* Ért. **29**, 112 (1911)] enthält. Verf. führt zwar den Beweis nur für Graphen, doch läßt er sich ohne weiteres auf Bäume im kleinen übertragen. *G. Alexits* (Budapest).

**Apfelbacher, Karl:** Über Beziehungen zwischen Umgebungsräumen und Häufungsräumen. *Mh. Math. Phys.* **49**, 153—193 (1940).

Eine Menge  $M$  irgendwelcher Elemente, Punkte genannt, nennt Verf. einen Umgebungsraum  $T$  bzw. Häufungsraum  $H$ , wenn zu jedem Punkt  $P$  von  $M$  und jeder Menge  $A \subset M$  angegeben ist, ob  $A$  als Umgebung von  $P$  bzw. ob  $P$  als Häufungspunkt von  $A$  betrachtet werden soll. Ist  $T$  ein Umgebungsraum, so besteht der zugeordnete Häufungsraum  $H = H(T)$  aus allen Punkten von  $T$  und  $P$  ist Häufungspunkt von  $A$ , wenn es in jeder Umgebung von  $P$  mindestens einen von  $P$  verschiedenen Punkt von  $A$  gibt; ist  $H$  ein Häufungsraum, so besteht der zugeordnete Umgebungsraum  $T = T(H)$  aus allen Punkten von  $H$ , und  $A$  ist Umgebung von  $P$ , wenn  $H - A$  weder  $P$  enthält noch zum Häufungspunkt hat. Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß ein Umgebungsraum  $T_0$  identisch ist mit  $T_1 = T(H(T_0))$  und ein Häufungsraum  $H_0$  identisch ist mit  $H_1 = H(T(H_0))$ . In einer Folge von Räumen, von denen jeder dem vorhergehenden zugeordnet ist und deren erster ein beliebiger Umgebungs- oder Häufungsraum ist, treten von einem gewissen Glied an immer derselbe Umgebungsraum und Häufungsraum im Wechsel auf. Bezeichnet man, wenn  $T_0$

ein Umgebungsraum und  $H_0$  ein Häufungsraum ist,  $T_0$  und  $H_0$  als äquivalent, wenn  $H_0 = H(T_0)$  und  $T_0 = T(H_0)$ , so sind die oben erwähnten Bedingungen kennzeichnend dafür, daß zu jedem Umgebungsraum bzw. Häufungsraum ein äquivalenter Häufungsraum bzw. Umgebungsraum existiert; die äquivalenten Räume sind dann die zugehörigen Räume. Verf. untersucht die in der Literatur auftretenden Räume bezüglich der genannten Begriffe. *Nöbeling* (Erlangen).

**Haupt, Otto, Georg Nöbeling und Christian Pauc: Sekanten und Paratingenten in topologischen Abhängigkeitsräumen.** J. reine angew. Math. 182, 105—121 (1940).

Es werden  $k$ -dimensionale Sekanten in sog. topologischen bzw. metrischen Abhängigkeitsräumen (dies. Zbl. 22, 121) untersucht. Die Begriffsbildungen sind sehr allgemein und umfassen alle im allgemeinen vorkommenden Raum- und Sekantengriffe. Selbst unter diesen weitgehenden Voraussetzungen gelingt es den Verff., folgende Sätze zu beweisen: 1. Ist  $K$  ein zu den singulären Punkten des zugrunde gelegten topologischen Abhängigkeitsraumes  $R$  fremdes Kontinuum aus  $R$ , so gehören je zwei von  $K$  aufgespannte Sekanten zu einem zusammenhängenden Teil der Menge aller von  $K$  aufgespannten Sekanten. 2. Ist  $R$  metrisch, so bilden die Sekanten und Grenzsekanten von  $K$  ein Kontinuum. 3. Ist  $R$  metrisch,  $M$  ein zu den singulären Punkten von  $K$  fremder, im Punkte  $p$  lokal zusammenhängender, kompakter Teil von  $R$ , so ist das lokale Paratingent von  $M$  in  $p$  ein Kontinuum. — Zum Beweis dieser Sätze leiten Verff. einen rein topologischen Satz her, der auch in folgender spezieller Form von großem Interesse ist: Es seien  $A_1, A_2$  zwei fremde abgeschlossene Teile eines metrisierbaren Kontinuums  $K$ . Dann enthält  $K - (A_1 + A_2)$  eine zusammenhängende Teilmenge, deren abgeschlossene Hülle mit  $A_1$  und  $A_2$  nicht leere Durchschnitte hat.

*G. Alexits* (Budapest.)

**Alexandroff, P.: Über die Dimension der bikompakten Räume.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 619—622 (1940).

Verf. beweist folgenden Satz: Die Dimension  $n$  eines bikompakten Hausdorffschen Raumes  $R$  ( $n + 1$  ist also die kleinste Ordnung beliebig feiner endlicher offener Überdeckungen von  $R$ ) ist der kleinsten unter den Zahlen  $n$  gleich, für die es zu jeder endlichen offenen Überdeckung  $\{o_i\}$  von  $R$  eine Abbildung  $f$  von  $R$  in (bzw. auf) ein  $n$ -dimensionales Polyeder  $P$  derart gibt, daß jede Menge  $f^{-1}(x)$  ( $x \in P$ ) ganz in einer Menge  $o_i$  enthalten ist. Dieser Satz wurde früher von Vedenissoff (dies. Zbl. 22, 85) unter der weiteren Annahme bewiesen, daß jede abgeschlossene Menge in  $R$  eine  $G_\delta$ -Menge ist.

*Bedřich Pospíšil* (Brünn).

**Whitney, Hassler: On the theory of sphere-bundles.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 26, 148—153 (1940).

In dieser Note wird die Theorie der vom Verf. eingeführten Sphärenräume (dies. Zbl. 12, 126), hier sphere-bundles genannt, in einigen wesentlichen Punkten weitergeführt. Die Untersuchungen sind nur skizziert und sollen demnächst ausführlich in Buchform veröffentlicht werden. Sie betreffen die charakteristische Homologiekategorie, für welche insbesondere eine Stiefelsche Vermutung bestätigt wird, ein Dualitätstheorem, Tangential- und Normalräume und verschiedene Beispiele. *Wolfgang Franz*.

**Alexandroff, P.: Die Bettischen Gruppen und der Homologiering eines lokal-bikompakten Raumes.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 623—626 (1940).

Die Bettischen Gruppen und der Homologiering eines normalen bikompakten Raumes werden auf eine neue Weise eingeführt, und zwar unter Benutzung von „Bedeckungen“ des Raumes mit endlichen Systemen offener Teilmengen, die den ganzen Raum ausfüllen, und Funktionen über solchen Bedeckungen. Die Isomorphie mit den Kolmogoroffschen Homologiegruppen soll in einer demnächst erscheinenden Arbeit von Chogoshvili bewiesen werden; die Isomorphie mit den von Steenrod (dies. Zbl. 15, 179) eingeführten Gruppen wird ebenso wie der Kolmogoroffsche Dualitätssatz in einer gleichzeitig in den Ann. of Math. erscheinenden Arbeit des Verf. bewiesen.

*Wolfgang Franz* (Gießen).



**Komatu, Atuo:** Über die Überdeckungen von Zellenräumen. 3. Proc. Imp. Acad. Jap. 16, 55—58 (1940).

Die von K. Reidemeister eingeführten Überdeckungen eines Komplexes mit einer Koeffizientengruppe  $J$  (dies. Zbl. 12, 126) induzieren eine Darstellung der Fundamentalgruppe in der Automorphismengruppe von  $J$ . Hier wird gezeigt, daß die Bettischen Gruppen einer Überdeckung nur von dieser Darstellung abhängen, d. h. daß Überdeckungen eines Komplexes, die dieselbe Darstellung induzieren, dieselben Bettischen Gruppen besitzen. Zu dem Zweck wird zwischen zwei derartige Überdeckungen eine Folge sogenannter benachbarter Überdeckungen eingeschoben und gezeigt, daß die Bettischen Gruppen benachbarter Überdeckungen gleich sind. Als Folgerung ergibt sich, daß bei Überdeckungen mit nichttrivialer Darstellung von  $n$ -dimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeiten die  $n$ -te Bettische Gruppe verschwindet. (Teil I. II. vgl. dies. Zbl. 20, 79, 407.) *Wolfgang Franz* (Gießen).

**Paxon, E. W.:** Linear topological groups. Ann. of Math., II. s. 40, 575—580 (1939).

Let  $\mathfrak{G}$  denote an abstract set of elements subjected to a Hausdorff neighborhood topology and supporting a group composed additively with identity written  $o$ . The neighborhoods of  $a \in \mathfrak{G}$  being denoted  $U_a, V_a$  etc.,  $\mathfrak{G}$  is supposed to have the properties: 1. For every  $U_{a+b}$  there exist  $U_a$  and  $U_b$  such that  $U_a + U_b \subset U_{a+b}$ . 2. For every  $U_0$  there exists  $V_0$  such that  $-V_0 \subset U_0$ . If, additionally, we have for every  $U_0$  and each positive integer  $n$  the inclusion  $U_0^n \subset nU_0$ , where  $A + B$  means the set of all  $a + b$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$ ,  $nA$  the set of all  $na = a + a + \dots + a$  ( $n$  summands) with  $a \in A$  and  $A^n = A + A + \dots + A$  ( $n$  summands), then  $\mathfrak{G}$  is said to be convex. The author proves the following theorem. In every Abelian, convex, connected and sequentially complete topological group  $\mathfrak{G}$  which possesses no elements of finite order it exists a continuous function  $\|p\|$  ( $p \in \mathfrak{G}$ ) with the properties: a)  $\|p\| > 0$ , b)  $\|\alpha p\| = |\alpha| \|p\|$  ( $\alpha$  rational), c)  $\|p + q\| \leq \|p\| + \|q\|$ . The concept of such a function, said "pseudo-norm" of  $\mathfrak{G}$ , is due to J. v. Neumann [Trans. Amer. Math. Soc. 37, 1—20 (1935); this Zbl. 11, 164]. In the proof the multiplication of elements of  $\mathfrak{G}$  by rational numbers is introduced, based upon the following definition.  $(1/n)v = q$  means  $p = nq$  where  $n$  is a positive integer and  $p, q \in \mathfrak{G}$ .  $\|p\|$  does not necessarily coincide with  $\varrho(o, p)$ , where  $\varrho(p, q)$  denotes the metric function of  $\mathfrak{G}$ , as proves the example of the space  $E_\omega$  of Fréchet. In the case of a complete normed vector space the pseudo-norm coincides with the norm of the space. *Z. Waraszkiewicz* (Warschau).

**Abe, Makoto:** Über Automorphismen der lokal-kompakten Abelschen Gruppen. Proc. Imp. Acad. Jap. 16, 59—62 (1940).

Es wird die topologische Isomorphie der Homomorphismenringe einer lokal-kompakten Abelschen Gruppe mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom und ihrer Pontrjaginischen Charaktergruppe nachgewiesen. Eine Teilbehauptung war schon früher von A. Komatu (dies. Zbl. 18, 278) bewiesen. *Wolfgang Franz* (Gießen).

**Kerékjártó, B. de:** Sur les fondements de la géométrie des cercles. Mat. fiz. Lap. 47, 48—56 u. franz. Zusammenfassung 56—57 (1940) [Ungarisch].

Van der Waerden und Smid (dies. Zbl. 10, 268) gaben eine axiomatische Begründung der Kreisgeometrie. Süss [Tôhoku Math. J. 28, 228—241 (1927)] gab eine gruppentheoretische Begründung, wobei er doch auch Kreisaxiome zu Hilfe nahm. Verf. erzielt eine rein gruppentheoretische Begründung der Kreisgeometrie. Sie wird in einer folgenden Arbeit geliefert werden. Die Hauptrolle spielt darin folgender Satz: Entspricht die Gruppe  $G$  topologischer Abbildungen der Kugel auf sich, bei denen die Orientierung unverändert bleibt, den beiden folgenden Bedingungen, so ist  $G$  mit der linearen Abbildungsgruppe der Kugel homöomorph. Die Bedingungen sind: 1. es gibt eine und nur eine Abbildung in  $G$ , bei welcher die beliebig gegebenen Punkte  $A, B, C$  den beliebig gegebenen Punkten  $A', B', C'$  entsprechen; 2. diese Abbildung hängt stetig vom Punktetripel  $A', B', C'$  ab. *G. Hajós* (Budapest).

**Scorza Dragoni, G.:** Un'osservazione sull'esistenza di elementi uniti nelle trasformazioni topologiche del cerchio. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. s. **19**, 45—49 (1940).

In Zusammenhang mit Untersuchungen von L. E. J. Brouwer [*Math. Ann.* **71**, 97—115 (1912)], E. Sperner [*Abh. math. Semin. Hamburg. Univ.* **10**, 1—47 (1934); dies. *Zbl.* **9**, 183] und dem Verf. [*Rend. Lincei* **69**, **23**, 181—186 (1936); dies. *Zbl.* **13**, 323] wird folgendes gezeigt: In der Ebene  $\pi$  sei  $C$  eine Kreisscheibe,  $c$  ihr Rand,  $\Gamma$  ein Abbild von  $C$  mittels der topologischen Abbildung  $t$ . Dann hat  $t$  mindestens einen Fixpunkt, wenn der Durchschnitt  $C \cdot \Gamma$  mindestens zwei Punkte enthält und wenn jeder Punkt von  $c$ , der sich mit dem Unendlichen von  $\pi$  nicht verbinden läßt, ohne  $c$  oder dem Rand  $\gamma$  von  $\Gamma$  zu begegnen, durch  $t$  in einen Punkt von  $C$  übergeführt wird.

*Blaschke* (Hamburg).

**Hirsch, Guy:** Détermination du nombre algébrique des points fixes de certaines représentations. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. **25**, 319—328 (1939).

Es handelt sich um eindeutige stetige Selbstabbildungen eines  $n$ -dimensionalen Polyeders  $P$ , welches aus einer geschlossenen Pseudomannigfaltigkeit mit den Betti'schen Zahlen der  $n$ -Sphäre hervorgeht durch Entfernung einer Anzahl von elementfremden  $n$ -dimensionalen Zellen. Die Fixpunktzahl wird nach der Lefschetz-Hopf'schen Formel in leichter Verallgemeinerung bekannter Resultate zu  $1 + (-1)^{n-1}(f-1)c$  berechnet. Dabei bezeichnet  $c$  den Abbildungsgrad und  $f$  die Anzahl derjenigen Begrenzungsphären von  $P$ , die bei der Abbildung in homotope Sphären übergehen.

*Wolfgang Franz* (Gießen).

## Klassische theoretische Physik.

**Capocaccia, Antonio Agostino:** Un metodo per l'analisi dimensionale di sistemi di più grandezze. *Atti Soc. Sci. Lett. Genova* **4**, 143—153 (1939).

$n$  Größen  $y', y'', \dots$  sollen als Funktionen von  $n$  anderen Größen  $x_1, x_2, \dots$  ausgedrückt werden, wenn die (physikalischen) Dimensionen (Anzahl sei  $m$ ) bekannt sind. Ausgehend von einer Potenzentwicklung nach  $x$  lassen sich die  $y$  darstellen als Funktionen von  $n - m$  dimensionslosen Monomen der  $x$ , multipliziert mit Faktoren, deren Dimension gleich der von  $y$  ist. Anwendung auf das Problem der Schmiermittelreibung.

*Klose* (Berlin).

● **Kármán, Theodore v., and Maurice A. Biot:** Mathematical methods in engineering. New York: McGraw-Hill 1939. XII, 505 pag. 4/-.

## Mechanik:

**Johnsen, Leif:** Calcul symbolique des pseudocoordonnées. *Arch. Math. og Naturvid.* **42**, Nr 3, 1—12 (1939).

L'Autore sviluppa un calcolo simbolico delle pseudocoordinate, muovendo dall'ipotesi generale che i vincoli di un sistema dinamico ad  $n$  coordinate  $q_1, \dots, q_n$  siano della forma

$$(1) \quad \varphi_\nu(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, h; h < n),$$

dove le  $\dot{q}$  esprimono le velocità. — Questo calcolo permette di generalizzare la nozione di deviazione non olonoma, secondo E. B. Schieldrop ed un teorema di Appell sull'ordine di non ologonia di un sistema. — Risolvendo parametricamente le (1) rispetto alle  $\dot{q}$ , si ha

$$(2) \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i^*(q, \dot{\omega}, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dove i parametri  $\dot{\omega}_\sigma$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, m = n - h$ ) sono le pseudovelocità indipendenti. In uno spostamento infinitesimo del sistema, compatibile con i vincoli, a partire dallo stato  $q, \dot{q}, t$ , nell'intervallo di tempo da  $t$  a  $t + \Delta t$ , sia  $\Delta q_i$  la variazione che subisce la generica coordinata  $q_i$ . Trascurando i termini di ordine superiore al 2° nelle  $\Delta q$  e



$\Delta t$ , si ha

$$(3) \sum_i \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \dot{q}_i} \Delta q_i - \Delta t \sum_j \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left( \sum_j \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t} \right) = 0 \quad (\nu = 1, \dots, h).$$

È allora possibile esprimere, attraverso le (3), le  $\Delta q$  in funzione di  $\Delta t$  e di  $m$  spostamenti indipendenti  $\Delta \kappa_\sigma$  e stabilire una corrispondenza tra le  $\Delta \kappa$  e le  $\dot{\omega}^*$ , ponendo

$$\Delta \kappa_\sigma = \Delta \omega_\sigma = \dot{\omega}_\sigma^* \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d \dot{\omega}_\sigma^*}{dt} \Delta t^2.$$

Si conviene di dire che  $\Delta \omega_\sigma$  è la variazione della pseudocoordinata ( $\omega_\sigma$ ) corrispondente ad  $\dot{\omega}_\sigma^*$  e se  $f^*(q, \dot{\omega}^*, t)$  è una funzione delle  $q, \dot{\omega}^*, t$ , la derivata parziale di  $f^*$  rispetto alla pseudocoordinata ( $\omega$ ) è

$$\frac{\partial f}{\partial (\omega_\sigma)} = \sum_k^n \frac{\partial f^*}{\partial q_k} \frac{\partial \dot{q}_k^*}{\partial \dot{\omega}_\sigma^*}.$$

L'applicazione di queste generalità conduce a porre le equazioni del moto del sistema sotto la forma  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\omega}_\sigma^*} - \frac{\partial T^*}{\partial (\omega_\sigma)} - Q_\sigma^* = \Gamma_\sigma^* \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m)$ ,

dove  $T^*$  è l'energia cinetica espressa nelle variabili  $q, \dot{\omega}^*, t$  e

$$Q_\sigma^* = \sum_i Q_i \frac{\partial q_i}{\partial (\omega_\sigma)}, \quad \Gamma_\sigma^* = p_i \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial (\omega_\sigma)} - \frac{\partial \dot{q}_i^*}{\partial (\omega_\sigma)} \right\}, \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}.$$

G. Lampariello (Roma).

**Pâquet, P.-V.:** Sur l'extension de la théorie de Hamilton-Poisson à la dynamique des champs. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 25, 212—223 (1939).

Die Forderung, daß die Variation von  $\int L(x^i, y^\alpha, y_i^\alpha) dx^1 \dots dx^n$ ;  $y_i^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}$ ;  $x^n = t$ ;  $\alpha = 1, \dots, m$ ,  $i = 1, \dots, n$  über ein zylindrisches Gebiet  $G$  (mit der Zeitrichtung als Hauptrichtung) verschwindet, führt zu dem Gleichungssystem

$$(1) \quad \frac{\partial L}{\partial y^\alpha} - \sum_i \frac{d}{dx^i} \frac{\partial L}{\partial y_i^\alpha} = 0.$$

Dieses System läßt sich umformen, indem man die Funktion

$$\bar{L} = \int_{S_{n-1}} L(x^i, y^\alpha, y_i^\alpha) dx^1 \dots dx^{n-1}$$

einführt, wo über den Durchschnitt  $S_{n-1}$  von  $G$  mit  $t = \text{konstant}$  integriert wird.

Das System (1) ist nämlich gleichwertig mit  $\frac{\delta \bar{L}}{\delta y^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\delta \bar{L}}{\delta \dot{y}^\alpha} = 0$ . In ähnlicher Weise

findet man für die Hamiltonschen Gleichungen eines Feldes  $\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta y^\alpha}$ ,  $\frac{dy^\alpha}{dt} = \frac{\delta H}{\delta p_\alpha}$ ,

wo  $\bar{H} = \int_{S_{n-1}} H(x^i, y^\alpha, y_i^\alpha, p_\alpha) dn^1 \dots dn^{n-1}$  ist. Auch die Verallgemeinerung der

Klammern von Poisson und der damit zusammenhängenden Relationen wird mittels der Variationstheorie angegeben.

J. Haantjes (Amsterdam).

**Arrighi, Gino:** Sulla riduzione di rango dei sistemi alle caratteristiche per moti inerziali. Ist. Lombardo, Rend., IV. s. 73, 168—174 (1940).

L'Auteur applique les procédés bien connus de réduction d'ordre, lorsqu'on possède une intégrale première linéaire, aux équations du mouvement par inertie d'un système à liaisons holonomes ou non holonomes.

G. Lampariello (Roma).

**Arrighi, G.:** Il principio della direttissima per il moto impulsivo. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 29, 259—264 (1939).

On énonce le théorème bien connu de Carnot dans la théorie des percussions, en représentant les configurations du système matériel par un point figuratif d'un espace  $S_n$  euclidien.

G. Lampariello (Roma).

**Vescan, Théophile:** Contributions à l'étude d'Appell sur les applications de l'homographie en mécanique. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest **10**, 51—56 (1939).

Der von Appell herrührende Satz, wonach die projektive Transformation  $x'_i = \frac{a_i x_1 + b_i x_2 + c_i}{\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma}$  ( $i = 1, 2$ ) in Verbindung mit der Zuordnung  $k dt' = \frac{dt}{\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma}$  jede unter der Einwirkung einer bloß von den Lagekoordinaten abhängigen Kraft vor sich gehende Bewegung eines Punktes ( $x_1, x_2$ ) stets wieder in eine derartige Bewegung eines Punktes ( $x'_1, x'_2$ ) überführt und wonach ferner die angeführten Transformationen die einzigen dieser Art sind, wird auf den Fall der Bewegung eines Punktes im  $n$ -dimensionalen Raum übertragen. Schoblik (Brünn).

**Masotti, Arnaldo:** Sui moti oscillatorii di un punto. Ist. Lombardo, Rend., IV. s. **73**, 49—61 (1940).

Il est bien connu qu'à un mouvement rectiligne harmonique on peut faire correspondre un mouvement uniforme le long d'une circonférence dont le centre est le centre d'oscillation. On démontre, dans cette note, qu'il existe seulement un autre cas de mouvement vibratoire auquel correspond un mouvement circulaire central (le centre ne coïncidant pas cette fois avec celui de la force accélératrice): c'est le mouvement de la projection sur le grand axe d'un point qui décrit une ellipse avec la loi des aires (mouvement Keplerien). G. Lampariello (Roma).

**Neronoff, N.:** Sur les positions d'équilibre instable dans un problème de dynamique. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. **15**, Nr 1, 81—89 u. franz. Text 89—97 (1938) [Ukrainisch].

Ein biegsamer und nicht dehnbarer Faden der Länge  $S$ , der mit seinen beiden Enden an zwei festen Punkten  $A$  und  $B$  in der Entfernung  $l < S$  voneinander befestigt ist und auf dessen Linienelement eine der Masse sowie der Entfernung des Linienelements von der Geraden  $AB$  proportionale, von dieser Geraden weg gerichtete Kraft wirkt, besitzt unendlich viele Gleichgewichtslagen, die sich derart in eine Reihe ordnen lassen, daß die als  $n$ -te ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) aufgezählte Gleichgewichtsfigur die Gerade  $AB$  zwischen  $A$  und  $B$  in genau  $n - 1$  Punkten durchsetzt (Clebsch, Appell). Verf. untersucht die von den früheren Bearbeitern dieses Problems offene gelassene Frage nach der Stabilität bzw. Instabilität dieser Gleichgewichtslagen und kommt mit Benützung des bekannten Satzes von Liapounoff über instabile mechanische Systeme durch direkte Diskussion der zweiten Variation der Kräftefunktion zu dem Ergebnis, daß in dem Falle, wo  $S$  nur wenig von  $l$  verschieden ist, alle Gleichgewichtslagen  $n > 1$  instabil sind, und daß im Falle eines beliebigen Wertes  $\frac{S}{l} > 1$  eine untere Grenze  $f\left(\frac{S}{l}\right)$  angegeben werden kann von der Art, daß alle Gleichgewichtslagen für  $n > f\left(\frac{S}{l}\right)$  gleichfalls instabil sind. Schoblik (Brünn).

**Mileoveanu, Dan:** Calcul du gradient pour un cylindre d'axe vertical. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. **22**, 318—328 (1940).

Im Hinblick auf geologische Anwendungen leitet Verf. für die Ableitung  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$  des Potentials  $U$  eines in Richtung seiner Achse (der  $z$ -Achse des zugrunde gelegten Koordinatensystems) einseitig unbegrenzten Kreiszyinders homogener Dichte eine für näherungsweise Berechnung geeignete Reihendarstellung her. V. Garten.

**Tonolo, Angelo:** Sul moto gravitazionale per cilindri circolari coassiali di un mezzo continuo indefinito disgregato. Boll. Un. Mat. ital., II. s. **2**, 205—209 (1940).

Elementare Beschreibung der Bewegung eines kontinuierlichen, vollkommen inkohärenten Mediums, das den Außenraum eines unendlich langen starren Kreiszyinders erfüllt, bei alleiniger Wirkung der Gravitationskräfte und unter der Annahme völliger Achsensymmetrie des Anfangszustandes des Mediums und der Massenverteilung des starren Zylinders sowie unter der Voraussetzung des ebenen Charakters des Problems. Schoblik (Brünn).



**Martin, Monroe H.:** Euler's problem of two fixed centres of gravitation. *Philos. Mag.*, VII. s. 27, 149—173 (1939).

In dieser eingehenden Arbeit klassifiziert Verf. die verschiedenen Bahntypen für einen Massenpunkt, der sich in der Ebene zweier fester anziehender Zentren der Massen  $K$  und  $K'$  bewegt. Charliers Klassifikation (*Mechanik des Himmels* I. 1927) enthielt nichtexistierende Bewegungsformen und war außerdem nicht vollständig. Auch der Vereinfachungen bietende Fall gleicher Massen  $K = K'$  wird behandelt.

*E. Hölder* (Braunschweig).

**Lintes, I.:** La balistique antiaérienne. (La balistique nadirale.) *Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest* 10, 112—119 (1939).

L'auteur se propose d'intégrer les équations différentielles simplifiées:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k \frac{F(w)}{w} v \cos \theta, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -k \frac{F(w)}{w} v \sin \theta - g, \quad w = \frac{v \cos \theta}{\cos \alpha} \cdot \frac{s_0}{\zeta},$$

de la Balistique Extérieure ( $v$  = la vitesse du projectile,  $\alpha$  = l'angle de projection,  $\theta$  = l'angle que fait la tangente de la trajectoire au moment  $t$  avec l'horizon) pour  $F(w) = w^p$ ,  $p$  étant une constante ( $1 < p \leq 2$ ). La substitution:  $x = v_0 \cos \alpha \varphi(t)$ ,  $z = v_0 \sin \alpha \varphi(t) - g\psi(t)$  qui revient au fond à rapporter le mouvement du projectile à un système d'axes obliques, dirigés suivant la direction de la vitesse initiale et de la verticale, conduit à un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants du quatrième ordre dont l'intégration est immédiate. Cette étude est suivie de l'étude du faisceau de trajectoires antiaériennes, des courbes d'égaux durées du trajet, des courbes d'égaux vitesses restantes etc. Par mégarde l'auteur écrit (13)  $\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_0 t}$  au lieu de  $\gamma = \frac{\gamma_0}{(1 + \gamma_0 t)^s}$ .

Les corrections, dues à cette omission, sont faciles à faire. *Kyrille Popoff* (Sofia).

**Lintes, I.:** Les recherches balistiques au tunnel aérodynamique. *Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest* 10, 119—123 (1939).

En comparant l'expression de la résistance de l'air au mouvement sous la forme  $R = mc \cdot v^2 f(v)$ , admise en Balistique Extérieure, avec la forme  $R = \frac{1}{2} \rho \cdot C x \cdot S \cdot v^2$ , admise en Aérodynamique, l'auteur tâche d'obtenir des renseignements sur la fonction  $f(v)$  par l'étude de la résistance au tunnel aérodynamique. Conclusion: On arrivera à résoudre ainsi certains problèmes balistiques seulement aux tunnels hypersoniques.

*Kyrille Popoff* (Sofia).

**Arrighi, Gino:** Solido con un punto fisso: Caso in cui un impulso attivo non cimenta il vincolo. *Boll. Un. Mat. ital.*, II. s. 1, 339—345 (1939).

Dans cette Note, on envisage un corps solide mobile autour d'un point fixe  $O$  et à un instant  $t_0$  on lui applique une percussion  $J$ . Peut-on disposer de  $J$  de façon que le point fixe  $O$  ne supporte aucune percussion de réaction? Si  $P$  est le point d'application inconnu de  $J$ ,  $G$  le centre de gravité du corps et  $\sigma$  l'homographie d'inertie, il est aisé de voir que la direction de  $J$  doit être une direction nulle de l'homographie  $m(G - O) \wedge \sigma^{-1}[(P - O) \wedge] + 1$ , où  $m$  désigne la masse du corps. — Le lieu  $\Gamma$  des points  $P$  qui satisfont à cette condition est, en général, une paraboloides hyperbolique qui dégénère seulement lorsque  $G$  appartient au plan de deux directions principales d'inertie par  $O$ .

*G. Lampariello* (Roma).

### Elastizität, Akustik:

**Southwell, R. V.:** Castigliano's principle of minimum strain-energy, and the conditions of compatibility for strain. *Stephen Timoshenko-Festschr.* 211—217 (1938).

Das Prinzip von Castigliano sagt aus, daß von allen den Gleichgewichtsbedingungen genügenden elastischen Zuständen der wirklich eintretende (d. h. geometrisch mögliche) Zustand die Formänderungsenergie zu einem Minimum macht. Das Prinzip kann daher als Ersatz für die Kompatibilitätsgleichungen dienen, die mit seiner Hilfe auch herleitbar sein müssen. Eben diese Herleitung hat Verf. an früherer Stelle gegeben (*Proc. Roy. Soc. London A*, 154, 4), und er will nun eine Lücke („a paradox“), die damals

geblieben war, schließen: Er erhielt die 6 Verträglichkeitsbedingungen teils unter Benutzung der drei Maxwellschen, teils der drei Moreraschen Spannungsfunktionen — mußten sich die Gleichungen nicht, da sie alle 6 notwendig sind, aus einem der Funktionentripel gewinnen lassen? Die vorliegende Note versucht zu zeigen, daß dies in der Tat möglich ist. (Anm. des Ref.: Verf. beweist, daß die 6 Gleichungen notwendig und daß sie zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung des elastischen Zustandes auch hinreichend sind — daraus folgt aber noch nicht, daß sie alle 6 voneinander unabhängig sind. Sie können das nicht sein, weil die 6 Gleichungen allein sonst zur Bestimmung der 6 Verzerrungskomponenten ausreichen müßten; d. h. das eine Tripel ist wesentlich eine Folge des anderen, und die Tatsache, daß man je nach dem Spannungsfunktionsansatz zuerst zum einen oder zum anderen Tripel gelangt, enthält nichts eigentlich Paradoxes.) *Marquerre.*

**Weber, C.: Zur Umwandlung von rotationssymmetrischen Problemen in zweidimensionale und umgekehrt.** Z. angew. Math. Mech. **20**, 117—118 (1940).

Verf. erklärt drei Operationen, die es gestatten, gewisse rotationssymmetrische Belastungsfälle des Halbraumes  $y < 0$  über zwei zweidimensionale Spannungsprobleme in den ursprünglichen Belastungsfall zu transformieren. Hierbei werden alle diejenigen Deformations- und Spannungsgrößen mittransformiert, die sich wie Skalare überlagern, z. B. die Verschiebung in Richtung der Rotationsachse. Es gelingt daher, die genannten Spannungsgrößen für das eben bezeichnete räumliche Problem in speziellen Belastungsflächen aus den Belastungszuständen einer Halbebene zu bestimmen. *Wegner (Heidelberg).*

**Federhofer, K.: Berechnung der Auslenkung beim Ausbeulen dünner Kreisplatten.** Ing.-Arch. **11**, 118—124 (1940).

Für die Berechnung der Größe der Auslenkung bei allen Ausweichproblemen ist die Heranziehung der Glieder zweiter Ordnung in den Formänderungen erforderlich, während die Spannungs-Dehnungs-Gleichungen nach wie vor in der linearen (Hooke-schen) Form angesetzt werden können. Die Dehnungen in Richtung des Meridians und des Parallelkreises werden in der Form angesetzt  $\varepsilon_1 = \frac{du}{dr} + \frac{\varphi^2}{2}$ ,  $\varepsilon_2 = \frac{u}{r}$ , wenn  $u = u(r)$  die radiale Verschiebung eines Punktes der Platte in der Entfernung  $r$  vom Mittelpunkt und  $\varphi$  die Neigung der Tangente des Meridianschnittes im ausgebogenen Zustande bedeutet. Die Form der Ausbeulung wird dreh-symmetrisch angenommen. Die für das Problem geltende nichtlineare Differentialgleichung wird aufgestellt und mit Hilfe des Galerkinschen Verfahrens angenähert gelöst. — Für die Auslenkung des Mittelpunktes einer am Rande eingespannten und durch radiale Druckkräfte  $T$  am Rande belasteten Kreisplatte ergibt sich

$$f = \frac{4,2362 a}{\sqrt{(1 - \sigma^2) a^2 / h^2 - 33,687}} \sqrt{\frac{T}{T_k}},$$

wobei  $a$  den Plattenhalbmesser,  $2h$  die Dicke,  $\sigma$  die Poissonsche Zahl und  $T_k$  die Beul-last bedeutet. *Th. Pöschl (Karlsruhe).*

**Willers: Die erste Variation der Formänderungsarbeit ausgebeulter ebener Platten.** Z. angew. Math. Mech. **20**, 118—121 (1940).

Die Formänderungsarbeit einer durchgebogenen Platte besteht aus zwei Summanden, von denen nur der erste bei der Variation in die Differentialgleichungen eingeht, während der zweite nur von Einfluß auf die Randbedingungen ist (und auch auf die Übergangsbedingungen, z. B. bei sprungweiser Änderung der Plattendicke oder bei Besetzung der Platte mit linear verteilten mitschwingenden Massen). Die Variation des zweiten Integrals erfordert eine umständlichere Umformung, die hier in allen Einzelheiten ausgeführt wird. Im Zusammenhang damit wird die Form der verschiedenen möglichen Randbedingungen besprochen, insbesondere für Bereiche, deren Ränder sich aus einzelnen Stücken von Geraden und Kurven zusammensetzen und durch Einzelkräfte — auch in den Ecken — belastet sind. Zum Schlusse werden



die Besonderheiten für die Plattenbiegung und Plattenknickung, und bei dieser vor allem der Einfluß jenes zweiten Summanden auf die Beullast und auf die Auflagerreaktionen ausgebeulter Platten, erörtert.

*Th. Pöschl* (Karlsruhe).

**Einaudi, Renato:** *Un problema fondamentale della dinamica dei sistemi elastici.* Ann. Mat. pura appl., IV. s. **19**, 1—33 (1940).

Verf. behandelt das Anfangs-Randwertproblem eines homogenen isotropen elastischen Körpers mit quadratischer Energiedichte (Vorgabe der Lage und Geschwindigkeit der einzelnen Punkte zur Zeit  $t = 0$  sowie der Bewegung der Oberflächenpunkte für  $t \geq 0$ ; außerdem sind die Volumkräfte bekannte Funktionen der Zeit). Für einen mit der Beschleunigung zusammenhängenden Vektor wird beim Existenzbeweis ein Reihenansatz nach den Eigenschwingungsfunktionen gemacht; für die noch von  $t$  abhängigen Koeffizienten kommen dann Volterrasche Integralgleichungen, die leicht aufgelöst werden können. Auch ein Unitätssatz wird hergeleitet. In die Formeln gehen der nach Lauricella bestimmte Greensche Tensor sowie die zu ihm gehörige Spannkraft ein, deren Verhalten an der Begrenzung Verf. ausführlich soweit feststellt, als es für seine Zwecke erforderlich ist.

*E. Hölder* (Braunschweig).

**Pastori, Maria:** *Velocità di propagazione nelle membrane inestendibili.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **29**, 411—417 (1939).

On applique la méthode des caractéristiques au calcul de la vitesse de propagation d'une perturbation provoquée dans un point d'une membrane courbe inextensible. Le carré de cette vitesse est le rapport à la densité  $\rho$  de la membrane de la composante normale à la ligne d'onde de l'effort correspondant à la même ligne.

*G. Lampariello.*

**Einaudi, Renato:** *Sul moto di una sfera elastica.* Atti Accad. Sci. Torino **74**, 591—618 (1939).

Verf. behandelt unter bestimmten Konvergenzbedingungen das Problem, die elastische Bewegung in einer Kugel zu bestimmen, wenn im Augenblick  $t = 0$  der Bewegungszustand in jedem Punkt innerhalb der Kugel und für  $t \geq 0$  auf deren Oberfläche gegeben ist. In vorbereitenden Abschnitten wird die Differenzierbarkeit einer Reihe nach Kugelfunktionen auf der Kugelfläche selbst sowie die Darstellbarkeit eines divergenzfreen Vektors durch solche Reihen studiert. Der elastische Verschiebungsvektor  $\bar{S}$  wird dargestellt durch  $\bar{S} = \text{grad} F + \bar{V}$  mit  $\text{div } \bar{V} = 0$ , wobei für  $F$  und  $\bar{V}$  Wellengleichungen mit verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit gelten. Für  $F$  und  $\bar{V}$  werden Reihenentwicklungen der genannten Art angesetzt (Lösung von H. Lamb).

*F. Odqvist* (Djursholm).

## **Hydrodynamik:**

**Bechert, Karl:** *Zur Theorie ebener Störungen in reibungsfreien Gasen.* Ann. Physik, V. F. **37**, 89—123 (1940).

Für polytropische Druck-Dichte-Beziehung  $p = a^2 \rho^n / n$  mit  $n = 3/1, 5/3, 7/5, \dots$  werden die eindimensionale reibungsfreie Strömungs- und Kontinuitätsgleichung ( $v_x = u(x, t)$ ,  $v_y = v_z = 0$ ) dadurch streng gelöst, daß sie auf die Differentialgleichung von Darboux zurückgeführt werden. Nach Erörterung einiger allgemeiner Lösungseigenschaften aus der Differentialgleichung heraus sind deren bekannte Integrale zur expliziten Lösung des Anfangswertproblems in den Fällen  $n = 3/1, 5/3, 7/5$  benützt und ihr Zusammenhang mit den Riemannschen Lösungen besprochen. Es zeigt sich, daß der rechnerisch einfachste Fall  $n = 3$  (einem „eindimensionalen“ Gas entsprechend) alle wesentlichen Eigenschaften der Lösungen schon erkennen läßt; an ihm werden deshalb die Entwicklung der Dichteschwankung im ruhenden Gas zum Verdichtungsstoß ohne und mit Anwesenheit fester Wände als Beispiel durchgerechnet. Zum Schluß gibt der Verf. auch noch stehende Schwingungen für andere  $n$ -Werte der obigen Reihe an.

*Fues* (Breslau).

**Mohr, Ernst:** *Über die Kräfte und Momente, welche Singularitäten auf eine stationäre Flüssigkeitsströmung übertragen.* J. reine angew. Math. **182**, 65—104 (1940).

Die überaus breit angelegte Arbeit gibt zunächst eine Übersicht über Singuläri-

tätensysteme, die einen in eine stationäre Flüssigkeitsströmung eingebetteten Festkörper zu ersetzen vermögen. Alsdann wird die Frage behandelt, mit welchen Kräften und Momenten solche Singularitäten in der Strömung festgehalten werden müssen.

*Harry Schmidt* (Berlin).

**Poncein, Henri:** Sur les conditions de stabilité d'une discontinuité dans un milieu continu. (Application à la théorie des cavitations.) *Acta math.* **71**, 1—62 (1939).

In einem starren, evtl. geführten Gefäß bewege sich eine inkompressible Flüssigkeitsmasse, die durch eine Unstetigkeitsfläche der Dichte von unveränderlicher Gestalt in zwei Teile zerlegt wird, in deren jedem die Dichte konstant und die Flüssigkeitsbewegung wirbelfrei ist und eine Richtebene besitzt. Ist im einen Teil die Dichte Null, so handelt es sich um eine Kavitation, wie sie etwa an Schiffsschrauben auftritt. Die sehr eingehende, mit Methoden der Funktionentheorie arbeitende Untersuchung schließt sich an frühere Arbeiten des Verf. [*Publ. sci. techn. du ministère de l'air* Nr. 18 (1933); *J. Math. pures appl.* **1939**] an.

*E. Hölder* (Braunschweig).

**Tchaplyguine, J. S.:** Le glissement d'une lame plane d'une envergure infinie sur la surface d'un fluide pesant. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. **26**, 746—750 (1940).

Es wird das ebene Problem folgender Fragestellung behandelt: Eine ebene Platte von unendlicher Breite gleite über die Oberfläche einer unzusammendrückbaren schweren Flüssigkeit von unendlicher Tiefe bei sehr kleinem Anstellwinkel. Die Flüssigkeitsbewegung sei, auf die Platte bezogen, permanent und besitze ein Geschwindigkeitspotential. Im Unendlichen befinde sich die Flüssigkeit in Ruhe. Für stetig veränderliche Froudesche Zahlen wird die nach dem Vorgang von Sédoff (dies. Zbl. **15**, 325) mit funktionentheoretischen Mitteln gewonnene Lösung in Form einer Näherungsdarstellung genauer diskutiert [vgl. zur Fragestellung auch H. Wagner, *Z. angew. Math. Mech.* **12** (1932); dies. Zbl. **5**, 126].

*Garten.*

**Tamada, Kō:** Application of the hodograph method to the flow of a compressible fluid past a circular cylinder. *Proc. phys.-math. Soc. Jap.*, III. s. **22**, 208—219 (1940).

Zur Ermittlung der ebenen wirbelfreien Strömung einer kompressiblen Flüssigkeit um einen Kreiszyylinder wird die Hodographenmethode [vgl. hierzu etwa A. Busemann, *Z. angew. Math. Mech.* **17**, 73 (1937)] benutzt, wobei nach dem Vorgang von H. S. Tsien [*J. Aeron. Sci.* **6**, 399 (1939)] die Adiabate  $p \cdot v^\gamma = \text{konst.}$  im  $p, v$ -Diagramm durch ihre Tangente  $p_0 - p = c_0^2 \varrho_0^2 (v - v_0)$  an der dem Zustand ungestörter Parallelströmung entsprechenden Stelle  $(p_0, v_0)$  approximiert wird. Die so erhaltenen Resultate stehen mit einschlägigen Messungen von G. I. Taylor und C. F. Sharman [*Proc. Roy. Soc. London A* **121**, 194 (1928)] in gutem Einklang.

*Harry Schmidt.*

**Sakurai, Tokio:** New method of evaluating the flow in boundary layer which varies with time. *Proc. phys.-math. Soc. Jap.*, III. s. **21**, 632—637 (1939).

Näherungsweise Auflösung der nichtstationären laminaren Grenzschichtgleichungen, indem in erster Näherung die konvektiven Glieder überhaupt vernachlässigt werden, in zweiter Näherung die konvektiven Glieder nach der ersten Näherung angesetzt werden. Anwendung dieses an sich bekannten Prinzips auf zwei Sonderfälle.

*W. Tollmien* (Dresden).

**Mohr, Ernst:** Die laminare Strömung längs der Platte und damit verwandte Flüssigkeitsbewegungen. (Neue „Lösungen“ von Prandtls Grenzschichtgleichungen.) *Deutsche Math.* **4**, 477—513 (1939).

Die Prandtlschen Differentialgleichungen der Grenzschicht lassen sich für den Fall der ebenen Strömung längs der Platte auf das bereits von Blasius und Toepfer untersuchte Randwertproblem einer gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichung dritter Ordnung zurückführen. Verf. gibt dazu ein Verfahren der sukzessiven Approximation, das sich für numerische Zwecke eignet. Verf. versucht, den Ergebnissen auch eine Bedeutung für Strömungen längs hinreichend „dünner parabolischer Platten“ zu geben; diese hätten danach alle dasselbe Widerstandsgesetz. Weiter wird als räumliches Analogon die Strömung längs eines hinreichend dünnen, parabolischen Drahtes.



besprochen. Zu Beginn wird ein Ansatz zur Fortsetzung des Geschwindigkeitsprofils im allgemeinen aufgestellt; er wäre durch eine geeignete Potenzentwicklung der Geschwindigkeitskomponente parallel zur Platte zu behandeln. *E. Hölder.*

**Schröder, Kurt:** Über die Prandtl'sche Integro-Differentialgleichung der Tragflügeltheorie. Abh. preuß. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. 1939, 1—35.

Die grundlegende Aufgabe der Prandtl'schen Theorie der tragenden Linie (L. Prandtl, Gött. Nachr., Math.-phys. Kl. 1918, 451) besteht darin, für einen vorgegebenen Tragflügel die Auftriebsverteilung längs der Spannweite zu ermitteln. Diese Aufgabe führt einerseits nach Prandtl zu einer Integro-Differentialgleichung, andererseits [H. Schmidt, Z. angew. Math. Mech. 17, 101 (1937)] zum dritten Randwertproblem der Potentialtheorie für das Außengebiet des Einheitskreises. In der vorliegenden Veröffentlichung wird die Prandtl'sche Integro-Differentialgleichung unter geeigneten Voraussetzungen über die Vorgaben (Verteilung der effektiven Flügeltiefe und des geometrischen Anstellwinkels längs der Spannweite) einer eingehenden Untersuchung unterzogen, indem mit Benutzung von Ergebnissen einer früheren Arbeit des Verf. [S.-B. preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. 30, 345 (1938), dies. Zbl. 21, 317] eine äquivalente Integralgleichung zweiter Art aufgestellt und ihre Lösung nach einer Methode von Enskog in Form einer absolut und gleichmäßig konvergenten Reihe (unter Beifügung einer Abschätzung des durch Begnügung mit einer Teilsumme begangenen Fehlers) angegeben wird. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß sich die Auftriebsverteilung bei einer parabolischen Verteilung der (effektiven) Flügeltiefe durch einen geschlossenen Ausdruck darstellen läßt. *Harry Schmidt* (Berlin).

**Bateman, H.:** The aerodynamics of reacting substances. (Guggenheim Graduate School of Aeron., Pasadena.) Proc. nat. Acad. Sci., Wash. 25, 388—391 (1939).

Um in der Aerodynamik die Berücksichtigung von physikalischen Prozessen, wie Wärmeleitung, Verdampfen und Diffusion, vorzubereiten, wird ein Variationsprinzip (vgl. H. Ertel, Meteor. Z. 56, 169) für den Fall  $n$  übereinander gelagerter, miteinander reagierender Substanzen aufgestellt. Variationsprinzipien dürften bei der Behandlung von Vorgängen an Diskontinuitätsflächen, z. B. Verbrennungsprozessen bei einer Explosion, nützlich sein. *T. Gustafson* (Lund).<sup>oo</sup>

### Elektrodynamik:

**Cocci, Giovanni, e Rinaldo Sartori:** Contributo allo studio delle reti per comunicazioni elettriche. Mem. Ist. Lombardi Sci. 24, 41—123 (1939).

Zunächst werden die Scheinwiderstandsfunktionen von Zweipolschaltungen mit endlich vielen Ohmschen Widerständen und Kapazitäten oder Ohmschen Widerständen und Induktivitäten untersucht [vgl. W. Cauer, Arch. Elektrotechn. 17 (1926/27)]. Weiter werden die Vierpoleigenschaften eines gegebenen Vierpoles von Kettenstruktur ermittelt. Sodann werden Reaktanzvierpole unter Benutzung der beiderseitigen Kurzschluß- und Leerlaufwiderstände im Sinne der Behandlung von H. W. Bode (J. Math. Phys. 1934, 275) als Filter diskutiert, wobei auch der Fall mehrerer Durchlaßintervalle berücksichtigt wird. Eine ausführliche, mehr heuristische als strenge Untersuchung mittels des Fourierintegrals ist der Frage der scheinbaren Einschwingzeit einer elektrischen Schaltung (eines Netzwerkes) gewidmet. Sei  $F(p)$  ( $p = i\omega$ ,  $\omega$  Kreisfrequenz) die Frequenzcharakteristik des Netzwerkes, z. B. bei einem Vierpol das Verhältnis von komplexer Ausgangsspannung zu Eingangsspannung. Ist wie bei gewissen viel-

gliedrigen Tiefpaßfiltern  $F(p)$  von der Form  $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_r}{p^{n+r}}$  mit großem  $n$ , so entspricht

dem ersten Glied der Reihe als Wirkung einer Eingangsspannung: 0 für  $t \leq 0$ , 1 für  $t > 0$ , eine Ausgangsspannung  $\frac{c_0 t^n}{n!} + ((t^{n+1}))$ . Für große  $n$  findet man hieraus unter alleiniger Berücksichtigung des ersten Gliedes der Reihe die Einschwingzeit  $\vartheta = \frac{1}{c_0^n} \cdot \frac{n}{e}$ .

Eine Einschwingzeit  $\tau$  wird bei der angeführten Eingangsspannung ferner durch ein Verhältnis definiert, in dessen Zähler die Fläche im Diagramm „freie Schwingung-Zeit“ und in dessen Nenner die Anfangsamplitude der freien Schwingung steht. Danach

wird  $\tau = \frac{F'(0)}{F(\infty) - F(0)}$  erhalten, sofern dieser Ausdruck einen Sinn besitzt. Für den Fall, daß als Eingangsspannung von der Zeit  $t = 0$  ab eine rein sinusförmige Spannung wirkt, wird ein entsprechender, etwas verwickelterer Ausdruck als Einschwingzeit für die sinusförmige Schwingung angegeben und dem Ausdruck der Gruppenlaufzeit  $\frac{dB}{d\omega}$  ( $B(\omega)$  Phase), welche auch negativ sein kann, vorgezogen. Weiterhin werden Vierpole mit  $|F|^{-2} = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2m}$  betrachtet [vgl. E. L. Norton, Bell Syst. techn. J. 16, 178—193 (1937)]. Ein letzter Abschnitt ist der Untersuchung der Übertragungseigenschaften eines Vierpoles gewidmet, welcher aus Längswiderstand, Querkapazität, Längsinduktivität in Reihe mit Ohmschem Widerstand und Querkapazität parallel mit Ohmschem Widerstand gebildet ist. Hier ist  $F(p)^{-1}$  eine ganze rationale Funktion dritten Grades von  $p$ . Cauer (Berlin-Marienfelde).

**Gross, Hans-Georg:** Die Berechnung der Stromverteilung in zylindrischen Leitern mit rechteckigem und elliptischem Querschnitt. Arch. Elektrotechn. 34, 241—268 (1940) u. Göttingen: Diss. 1940.

Die Bestimmung der Dichte eines Wechselstromes aus der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, der sie im Inneren eines zylindrischen Leiters genügen muß, ist bei einem beliebigen Leiterquerschnitt sehr schwierig, weil man über ihren Wert an der Oberfläche nur mehr oder weniger plausible Annahmen machen kann. Deswegen haben Autoren, die sich in neuerer Zeit damit beschäftigt haben, wie z. B. M. J. O. Strutt, meist eine von Manneback angegebene Integralgleichung für die Stromdichte benutzt. Der Verf. bildet zunächst mittels des Vektorpotentials für die magnetische Feldstärke in einem unmagnetischen Medium ein System von drei gekoppelten Integralgleichungen für die Stromdichte und die beiden Komponenten der magnetischen Feldstärke, durch deren Elimination er eine Integralgleichung für die Stromdichte herleiten kann, die sich von der Mannebackschen nur unwesentlich unterscheidet. Dabei läßt er sich von physikalischen Vorstellungen leiten, wie man sie auch zur Erklärung der Entstehung elektromagnetischer Wellen verwendet. Das System dieser drei Integralgleichungen wird nun durch sukzessive Approximation zu lösen versucht, wobei die anfängliche Stromdichte im ganzen Leiterquerschnitt als konstant angenommen wird und die wiederholten Integrationen durch allerdings sehr umständliche Reihenentwicklungen bewältigt werden. Dementsprechend wird auf die Diskussion der „Grundintegrale“

$$J_{2n, 2m}(x, y) = \iint \xi^{2n} \cdot \eta^{2m} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \lg r \cdot d\xi \cdot d\eta;$$

$$K_{2n, 2m}(x, y) = - \iint \xi^{2n} \cdot \eta^{2m} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \lg r \cdot d\xi \cdot d\eta$$

und deren Ableitungen viel Mühe verwendet, wobei  $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$  und die Integrationen über den bezüglich der Achsen symmetrisch vorausgesetzten Leiterquerschnitt zu erstrecken sind. Für einen rechteckigen und elliptischen Querschnitt werden die Entwicklungen vollständig ausgeführt und durch je ein bis zu den Näherungen fünfter Ordnung rechnerisch durchgeführtes Beispiel erläutert. Die Darstellung ist manchmal undurchsichtig und nicht immer einwandfrei. A. Huber (Wien).

**Răduleş, Remus:** Rechteckige Wanderwellen auf Übertragungsleitungen. Bull. sci. École polytechn. Timişoara 9, 317—322 (1940).

Nach K. W. Wagner und F. Möller erblickt man in der Stromverdrängung die wesentliche Ursache der Abflachung der Wellenstirn rechteckiger Wanderwellen. Verf. hat früher eine Näherungslösung angegeben, bei der er die anfängliche Rechteckwelle durch ein Fouriersches Integral darstellte. In der vorliegenden Arbeit gibt



er eine andere Näherungslösung mittels der Carsonschen Integralgleichung der Operatorenrechnung. Verf. geht von der Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Fortpflanzung einer Spannung längs einer Übertragungsleitung mit verteilter Selbstinduktion, Kapazität, Ableitungswiderstand und Reihenwiderstand aus. Die Lösung wird als Quotient der Ausgangswelle als Funktion der Zeit und einer verallgemeinerten Impedanz als Funktion des Ortes und der Frequenz dargestellt. Es handelt sich um die Ermittlung dieser verallgemeinerten Impedanz, wobei Verf. auf operatorischem Wege die Wirkung der Stromverdrängung auf den Reihenwiderstand der Leitung in Betracht zieht. Durch Einsetzen ergibt sich ein Näherungsausdruck für den Verlauf und für die Abflachung der Wanderwelle. An Hand eines numerischen Beispiels werden die Ergebnisse dieser Näherung mit jenen der früheren Näherung verglichen, wobei sich eine befriedigende Übereinstimmung ergibt. *M. J. O. Strutt.*

**Buchholz, Herbert:** Die Bewegung elektromagnetischer Wellen in einem kegelförmigen Horn. (*Zentrallaborat. f. Fernmeldewes. d. AEG, Berlin.*) Ann. Physik, V. F. 37, 173—225 (1940).

Es handelt sich um die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen von einer Strahlungsquelle aus, die im Innern eines unendlich langen Hohlkegels mit vollkommen leitenden Mantelflächen angeordnet ist. Der Strahler erzeugt axialsymmetrische Wellen von zwei Typen: elektrische Transversalwellen und magnetische Transversalwellen. Verf. geht von ringförmigen Sendern aus: einem elektrischen Stromring bzw. einem magnetischen Stromring. Für beide Fälle stellt er die Ausdrücke für die betreffenden Hertzschen Vektoren auf. Durch Anwendung von Differentialoperationen auf diese Vektoren ergeben sich die Ausdrücke für die elektrischen und für die magnetischen Feldstärken. Im zweiten Abschnitt behandelt Verf. die Ausbreitung im Kegel für den Fall des zur Kegelhaxe transversalen elektrischen Feldes. Das Feld wird durch Integration in der komplexen Ebene über einen Integranden, der Kugelfunktionen halbzahlgiger Ordnung enthält, erhalten. Der Verlauf der verschiedenen Teilwellen wird mit Hilfe Debyescher Näherungen behandelt. Neben Phase und Amplitude der Welle berechnet Verf. auch die radiale Impedanz. Die Eigenschwingungen eines durch eine Kugelkappe abgeschlossenen Kegels werden angegeben und graphisch dargestellt. Im dritten Abschnitt werden die analogen Berechnungen für den Fall eines magnetischen Ringsenders durchgeführt. In einem Anhang findet sich eine zusammenhängende Darstellung der in der Arbeit verwendeten Beziehungen aus der Theorie der Kugelfunktionen. *M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

## **Optik:**

**Maruyama, Shuzi:** On the aplanatic surface. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 22, 320—325 (1940).

Der Verf. behandelt die Frage, wie bei einer optischen Flächenfolge, deren letzte Fläche aplanatisch ist, die Bildfehler beeinflußt werden, wenn man den Abstand zwischen vorletzter und letzter Fläche und den letzten Halbmesser so ändert, daß die Aplanasie erhalten bleibt. Für die Gesamtfolge bleiben Öffnungsfehler und Asymmetrie dieselben, die Bildfeldfehler werden anders, und zwar in verschiedener Weise, je nachdem der Achsenbildpunkt im Mittelpunkt der letzten Fläche oder in dem durch  $ns_k = n's'_k$  bestimmten Punkt liegt. *Hans Boegehold (Jena).*

## **Relativitätstheorie:**

**Papapetrou, A.:** Drehimpuls- und Schwerpunktsatz in der relativistischen Mechanik. Prakt. Akad. Athenōn 14, 540—547 (1939).

L'auteur discute le mouvement d'un système mécanique suivant la théorie de la relativité restreinte. Il montre que la ligne d'univers du centre de gravité dépend du système de Lorentz choisi pour autant qu'un tel système possède un moment d'impulsion par rapport à son centre de gravité. *Stueckelberg (Genf).*

**Moghe, D. N.:** On isotropic manifolds in the theory of relativity. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 10, 275—278 (1939).

**Rosen, N.:** General relativity and flat space. I. Phys. Rev., II. s. 57, 147—150 (1940).

Within the framework of the general theory of relativity, the author introduces at each point of space-time a Euclidean metric tensor  $\gamma_{\lambda\kappa}$  in addition to the usual Riemannian metric tensor  $g_{\lambda\kappa}$ .  $\gamma_{\lambda\kappa}$  represents the metric of the space one would have

if the gravitational field were removed. Now it is possible to impose covariant conditions on the gravitational field, f. i.  $g^{\mu\nu} \left[ \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} - \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} \right] = 0$ , where  $\left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\}$  and  $\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}$  are the Christoffel symbol belonging to  $g_{\lambda\kappa}$  and  $\gamma_{\lambda\kappa}$ . It can be verified that these conditions are the same as those imposed by Einstein in the case of the linear equations.

*J. Haantjes (Amsterdam).*

**Rosen, N.: General relativity and flat space. II.** Phys. Rev., II. s. 57, 150—153 (1940).

The author considers the possibility of interpreting the formalism of the general theory of relativity in terms of flat space, the fundamental tensor  $g_{\lambda\kappa}$  being regarded as describing the gravitational field but having no direct connection with geometry. The equations of geodesics are written down using the fundamental Euclidean form  $d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  (comp. I, preceding ref.).

*J. Haantjes (Amsterdam).*

**Lees, A.: The electron in classical general relativity theory.** Philos. Mag., VII. s. 28, 385—395 (1939).

Les équations de l'électrodynamique de Maxwell et de la théorie de gravitation d'Einstein sont résolues pour une surface fermée portant une densité superficielle du quadrivecteur de charge électrique, et une densité superficielle d'un tenseur d'énergie-impulsion de nature non-électromagnétique. Ce sont ces tensions non-électrodynamiques qui rendent stable cette surface chargée. Les formules générales sont ensuite appliquées au cas d'une sphère de rayon  $r_0$ . A l'extérieur ( $r > r_0$ ), les solutions sont le potentiel de Coulomb pour le champ électromagnétique et les  $g_{\mu\nu}$  de la solution du problème de l'électron ponctuel (cf. p. ex. Eddington, Theory of Relativity 1923, 185, Pauli, Relativitätstheorie Enc. Math. Wiss. 1921, 734). A l'intérieur ( $r < r_0$ ), le potentiel électrostatique est constant et les  $g_{\mu\nu}$  sont ceux valables dans l'absence de tout champ de gravitation. Le rapport entre  $r_0$ , la charge totale  $\varepsilon$  et la masse  $m$  est donné par  $r_0 = 2\pi\varepsilon^2/mc^2$ .

*Stueckelberg (Genf).*

## Atomphysik.

### Kristallbau und fester Körper:

**Chang, T. S.: The number of configurations of an assembly with long-distance order.** Proc. roy. Soc., Lond. A 173, 48—58 (1939).

Es wird ein Gitter vom Typus  $AB$  betrachtet, das in zwei Teilgitter ( $\alpha$ - und  $\beta$ -Plätze) zerlegt werden kann, die sich so durchdringen, daß keine zwei Plätze in einem der Teilgitter nächste Nachbarn im Gesamtgitter sind. Die Zahl der nächsten Nachbarn eines Gitterplatzes im Gesamtgitter sei  $z$ . Es wird berechnet, auf wieviel Weisen  $f(N, N\theta/2, N\theta'/2, X)$  man  $N\theta/2$  Teilchen auf  $\alpha$ -Plätzen und  $N\theta'/2$  Teilchen auf  $\beta$ -Plätzen so anordnen kann, daß die Zahl der Paare von nächsten Nachbarn  $X$  ist.  $N$  ist die Gesamtzahl der Gitterplätze. Die Methode der Berechnung besteht in einer Umkehrung der Ableitung der Gleichgewichtseigenschaften einer Überstruktur vom Typus  $AB$  mit willkürlicher Zusammensetzung aus der Verteilungsfunktion: Die Gleichgewichtseigenschaften werden durch Anwendung der Betheschen Methode direkt bestimmt; durch Vergleich mit dem Maximum der Verteilungsfunktion wird der Koeffizient  $f$  bestimmt. Der gewonnene Ausdruck ist für  $z \neq 2$  nur näherungsweise gültig; für  $z = 2$  gilt er exakt (für große Werte der Argumente), wie ein Vergleich mit dem Ergebnis der direkten Berechnung von  $f$  in diesem Fall zeigt. *J. Meixner.*

### Elektronentheorie:

**Budó, A.: Einfluß der Molekülform und frei drehbarer Dipolgruppen auf die dielektrische Relaxation.** (Physik. Inst., Univ. f. Techn. u. Wirtsch., Budapest.) Physik. Z. 40, 603—610 (1939).

Für Moleküle mit einer beliebigen Zahl  $n$  von frei drehbaren Gruppen (Drehachsen fest, aber sonst beliebig zu einem molekülfesten Koordinatensystem orientiert)



wird das mittlere Moment in einem hochfrequenten elektrischen Feld berechnet. Unter Berücksichtigung der Gestalt des Moleküls ergibt sich, daß für nicht zu große Frequenzen das mittlere Dipolmoment durch die Angabe von  $n + 3$  Relaxationszeiten bestimmt ist, die in Zusammenhang mit den  $n + 3$  Reibungsgrößen stehen. *Meixner*.

### Nicht-relativistische Quantentheorie:

**Planck, Max:** Versuch einer Synthese zwischen Wellenmechanik und Korpuskularmechanik. Ann. Physik, V. F. 37, 261—277 (1940).

Um zu erreichen, daß im Grenzfall  $\hbar \rightarrow 0$  die Schrödingersche Differentialgleichung des Einteilchensystems direkt in die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung für eine Korpuskel übergeht, verzichtet der Verf. bei den positiven Energiezuständen des Wasserstoffatoms auf die sonst übliche eine Randbedingung am Kern. (In der Auffassung der Schrödingergleichung als Gleichung einer anschaulichen Materiewelle bedeuten seine Lösungen Fälle, bei denen im Kern dauernd eine Quelle oder Senke konstanter Ergiebigkeit für Elektronenmaterie sitzt; in der üblichen Auffassung der Schrödingergleichung als Gleichung eines Einteilchensystems werden sie darum ausgeschlossen. D. Ref.) *F. Hund* (Leipzig).

**Rao, B. S. Madhava:** Quantum-mechanical interpretation of a result concerning Hermite polynomials. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 10, 217—219 (1939).

Für die normierten Hermiteschen Orthogonalpolynome  $H_n(x)$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} H_n^2 e^{-x^2} dx \rightarrow 0$$

(Iyengar, vgl. dies. Zbl. 23, 29); quantenmechanisch läßt sich diese Beziehung so interpretieren, daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines linearen harmonischen Oszillators im Intervall  $(\alpha, \beta)$  für große Quantenzahlen  $n$  bzw. große Energien gegen Null geht. Die Berechnung dieser Aufenthaltswahrscheinlichkeit nach der klassischen Mechanik (Grenzfall  $n \rightarrow \infty$ ) ergibt einen Ausdruck der Ordnung  $(n + 1)^{-1/2}$ .

*J. Meixner* (Berlin).

**Husimi, Kôdi:** On the asymptotic distribution of frequencies of a Hohlraum and the surface tension of an ideal gas. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 21, 759—768 (1939).

Als asymptotische Abschätzung der Anzahl  $j$  der Eigenschwingungen eines Quaders (Kanten  $a_1, a_2, a_3$ ; Wellengeschwindigkeit  $c$ ) unterhalb einer Grenze  $\nu$  wird abgeleitet

$$j(\nu) = a_1 a_2 a_3 \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\nu}{c}\right)^3 \pm \frac{1}{2} (a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2) \pi \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 + \frac{1}{4} (a_1 + a_2 + a_3) 2 \frac{\nu}{c} \pm \frac{1}{8} + \dots,$$

wobei die oberen Zeichen für freien Rand (vgl. D. Maa und R. H. Bolt, dies. Zbl. 20, 225 u. 226), die unteren für vorgegebenen Randwert 0 gelten. Daraus läßt sich der von der Oberfläche abhängige Anteil der Energie eines idealen (Bose-)Gases berechnen.

*F. Hund* (Leipzig).

**Sakai, Takuzô:** Gibbs' canonical ensemble and the distribution law in statistical mechanics. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 22, 199—207 (1940).

Die Verteilungsfunktionen für Fermi- und Bosestatistik werden unter Zugrundelegung der Gibbsschen kanonischen Gesamtheit abgeleitet. Die Anwendung der Stirlingschen Formel oder der Darwin-Fowlerschen Sattelpunktmethode wird so vermieden. Berechnung der Schwankungen der Energie und der Teilchenzahl für beide Statistiken, Anwendung auf das Gasmodell des Atomkerns. *J. Meixner*.

**Foroud, A., und E. Justi:** Untersuchungen über den elektrischen Widerstand von Molybdäneinkristallen unter der Einwirkung von starken magnetischen Quer- und Längsfeldern. Physik. Z. 40, 501—506 (1939).

Nach der gefundenen Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes von Temperatur und Magnetfeld gehört Mo ebenso wie W dem von Kohler [Physik. Z. 39, 9 (1938)] quantenmechanisch untersuchten Bariumtypus des elektrischen Leitungsmechanismus an. Der feldfreie Widerstand ist unterhalb 20° abs. proportional zu  $T^2$ . *J. Meixner*.



## Relativistische Quantentheorie:

**Yvon, J.:** Équations de Dirac-Madelung. J. Phys. Radium, VIII. s. 1, 18—24 (1940).

Avec l'aide des matrices  $\vec{\alpha}$  et  $\beta$  de Dirac on peut associer à tout spineur  $\psi$  (à 4 composantes) des expressions bilinéaires en  $\psi$  qui représentent des densités tensorielles. Ce sont le quadrivecteur de la densité du courant électrique, le quadrivecteur (pseudo-quadrivecteur, le réf.) de la densité du spin, le tenseur antisymétrique de la densité de polarisation électromagnétique, et deux scalaires (un pseudoscalaire, le réf.). Entre ces grandeurs existent trois relations tensorielles. Si l'évolution temporelle de  $\psi$  est donnée par l'équation de Dirac résultent des équations décrivant l'évolution temporelle des grandeurs tensorielles. A toute solution des équations de Dirac correspond une solution des équations tensorielles. Le réciproque n'est pas vrai. — Dans l'approximation classique ( $\hbar = 0$ ) on retrouve d'une part les lois gouvernant le mouvement d'un fluide à rapport constant entre la densité de la charge électrique et la densité de masse de repos. D'autre part le mouvement du spin devient celui d'un fluide composé de points obéissant à la théorie de l'électron magnétique de Kramers [Physica 1, 825 (1934), ce Zbl. 9, 418]. Dans l'approximation non relativiste les équations tensorielles deviennent celles que Madelung [Z. Physik 40, 322 (1926)] a associé à la théorie de Schroedinger. *Stueckelberg (Genf).*

**Proca, Alexandre:** Sur un type de particules élémentaires dont les fonctions d'onde satisfont à l'équation de Klein-Gordon. C. R. Acad. Sci., Paris 210, 563—564 (1940).

L'équation d'onde de de Broglie-Schrödinger peut être linéarisée suivant les procédés du calcul spinoriel (cf. Dirac, ce Zbl. 14, 423; Fierz, ce Zbl. 20, 189). L'auteur discute le cas de deux spineurs du premier et du troisième ordre, qui n'a pas été discuté par les auteurs mentionnés ci-dessus. (Ses résultats ne nous semblent pas surprenants, parce que le spineur du troisième ordre n'est que le gradient du spineur de premier ordre, ce qui ramène cette linéarisation à l'électron de Dirac. Le réf.)

*Stueckelberg (Genf).*

**Kemmer, N.:** The particle aspect of meson theory. Proc. roy. Soc., Lond. A 173, 91—116 (1939).

Die Gleichungen für Materie mit dem Spin 0 oder 1 werden (im Anschluß an Duffin, dies. Zbl. 20, 90) als Differentialgleichungen erster Ordnung in einer Form geschrieben, die der Diracschen Gleichung für das Elektron entspricht:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \beta_\mu \Psi + \kappa \Psi = 0$$

mit Vertauschungsregeln für die Operatoren  $\beta_\mu$ . Der Vierervektor des elektrischen Stromes ist dann in einfacher Weise mit  $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\mu}$  verknüpft; Energie-Impuls-Tensor und Drehimpuls werden angegeben. Die Gleichungen im elektromagnetischen Feld ergeben sich mit der üblichen Erweiterung; die daraus gebildete Gleichung zweiter Ordnung hat Zusatzglieder, die die Wirkung des Spins ausdrücken. Die  $\beta_\mu$  bilden eine Gruppe von 126 Elementen; sie hat drei irreduzible Darstellungen vom Grade 1, 5 und 10. Die 10reihige Darstellung entspricht der vektoriellen Mesontheorie (Spin 1), die 5reihige Darstellung der skalaren Theorie (Spin 0). Eine bestimmte reduzible Darstellung läßt sich in einfacher Weise aus zwei Sätzen Diracscher Matrizen bilden; sie entspricht einer bestimmten Kombination der vektoriellen und pseudoskalaren Theorien. Für den Übergang zum nichtrelativistischen Fall ( $c \rightarrow \infty$ ) wird eine besondere Wahl der  $\beta_\mu$  getroffen; der Übergang hat dann Ähnlichkeit mit dem von der Diracgleichung zur Paulischen Beschreibung des Spins. Die hier gegebene Behandlung der Mesontheorie verspricht nützlich zu sein für Untersuchungen der Partikeleigenschaften des Mesons. *F. Hund (Leipzig).*

**Fleischmann, Rudolf:** Atomkerne, Radioaktivität. II. Physik i. regelm. Ber. 8, 17—48 (1940).



## Astrophysik.

**Astapowitsch, I. S.:** Some results of the study of 66 orbits of meteorites. *Astron. J. Soviet Union* **16**, Nr 6, 15—43 u. engl. Zusammenfassung 43—45 (1939) [Russisch].

Aus den 584 bekannten Meteoritenfällen (bis 1. Januar 1938) untersucht der Verf. 66 Meteoritenbahnen und stellt in tabellarischer Form die Radianten sowie Bahnelemente zusammen und gibt die beobachteten Geschwindigkeiten an. Ebenso werden die jährlichen und täglichen Änderungen der Häufigkeit und die Verteilung in Azimut und Höhe angegeben. Eine Zusammenstellung gibt im Vergleich die Radianten von Meteoren, Boliden und Kometen an, wobei gezeigt wird, daß ungefähr 49 Bahnen identisch sind. Neue Meteorströme werden angezeigt, und zwar die Virginiden, Cancriden, Eridaniden, Tauriden, Cygni-Lacertiden. Sechs der elliptischen Meteoritenbahnen stimmen mit Sicherheit mit den Bahnen der Kometen aus den Jahren 1092, 1702, 1797, 1851 I, 1874 II und 1790 III überein. Alle Kometenmeteorite sind bronzit-hypersthene Chondrite von einer Zusammensetzung  $(\text{Fe, Mg})_2\text{Si}_2\text{O}_6$ , weshalb der Verf. auf die wahrscheinliche Anwesenheit folgender Elemente in den Spektren kometarer Meteore aufmerksam macht: Fe, Mg, Si und O. Die Meteorite des Sonnensystems zeigen eine besondere Gleichförmigkeit mit einer Albedo von 0,2—0,3, die sich der Albedo von Asteroiden ähnlich zeigt. Die Entstehung von Meteoriten muß man verschiedenen Ursachen zuschreiben, sie können im Sonnensystem und auch außerhalb entstehen. Ihre Anzahl im Sonnensystem ist nach des Verf. Ansicht viel höher als bisher geschätzt wurde.

*Hubert Slouka (Prag).*

**Walter, K.:** Zustand und Aufbau von Algolsystemen. *Z. Astrophys.* **19**, 157—224 (1940).

Die bei engen Doppelsternsystemen beobachtete Korrelation von Bahnexzentrizität und Umlaufperiode, deren rein mechanische Erklärung auf Schwierigkeiten stößt, wird vom Verf. als Zustandsbeziehung zu deuten versucht auf Grund der Arbeitshypothese, daß bestimmte physikalische Eigenschaften der Komponenten eine Tendenz zur Vergrößerung oder Verkleinerung der Exzentrizität hervorrufen können. Als funktionell verständliche Zustandsparameter kommen in Betracht einerseits innere Rotationsunterschiede, die bei den frühen Hauptreihensternen wahrscheinlich sind und eine Zunahme der Exzentrizität bewirken, und andererseits Gezeitenschwingungen und die damit verbundenen Reibungsvorgänge, die zu einer Abnahme der Exzentrizität führen. Bei Systemen, deren Komponenten verschiedenartige Wirkung ausüben, sind also besonders verwickelte und interessante Zusammenhänge zu erwarten. Den Hauptinhalt der Arbeit bildet daher eine ausführliche Diskussion der Verhältnisse bei den aus einem Hauptreihenstern und einem Unterriesen bestehenden Algolsystemen, für die das Beobachtungsmaterial von 83 Objekten in einem Anhang zusammengestellt ist. Von den Ergebnissen dieser Betrachtungen, die hier nicht in ihren Einzelheiten wiedergegeben werden können, erscheint bemerkenswert der Zusammenhang zwischen Radius der Hauptkomponente und Gezeitendeformation der Nebenkomponeute, in dem sich eine auf zwei verschiedene Zustände der Hauptreihensterne hinweisende Gruppenbildung ausprägt. Das unterschiedliche Verhalten von Hauptreihensternen und Unterriesen läßt sich durch verschiedenartigen Bewegungstypus im Sterninnern (zelluläre bzw. ungeordnete Turbulenz) erklären, wodurch sich auch eine kosmogonische Deutungsmöglichkeit für die Haupteigentümlichkeiten in der Verteilung der Bedeckungsveränderlichen auf die verschiedenen Klassen ergibt.

*Wempe (Jena).*

**Payne-Gaposchkin, Cecilia:** Variable stars: A plan of study. *Proc. Amer. Philos. Soc.* **81**, 189—210 (1939).

Verf. stellt ein Programm für das systematische Studium der veränderlichen Sterne auf; das Ziel ist, das große photographische Material der Harvardsternwarte systematisch mit Rücksicht auf veränderliche Sterne durcharbeiten. Bis jetzt ist aber nur ein Teil des vorhandenen Materials bearbeitet worden, und die vorliegende



Arbeit ist nur als vorläufiger Bericht zu betrachten. Bei einem Studium der veränderlichen Sterne ist es notwendig, ein Maß für die Genauigkeit der benutzten Beobachtungsmethoden zu haben; dies wird dadurch erreicht, daß die Verfinsterungsveränderlichen als Standard- oder Vergleichssterne herangezogen werden. Verf. zeigt dann durch typische Beispiele den allgemeinen Charakter der Resultate über Lichtkurven und ihre Variationen und (in besonders glücklichen Einzelfällen) auch über Spektren und ihre Variationen. Auch über ein vergleichendes Studium der langperiodischen roten Veränderlichen (deren Beobachtung mit Schwierigkeiten verbunden ist) wird berichtet. Die „cataclysmic variables“ — unter ihnen seien besonders die Supernovae genannt — werden nicht behandelt; technische Einzelheiten bleiben auch unberücksichtigt. Die Darstellung wird durch viele und gut gewählte Beispiele ergänzt. Verf. kündigt weitere Veröffentlichungen über denselben Gegenstand an. *Steensholt* (Kopenhagen).

**Ahnert, P.: Die Verteilung der langperiodischen Veränderlichen.** *Astron. Nachr.* 269, 241—257 (1939).

Für 998 Mirasterne, die im Maximum mindestens die visuelle Größe  $10,4^m$  erreichen, wird die Verteilung an der Sphäre ermittelt. Als charakteristische Merkmale ergeben sich: Nesterbildung, Konzentration der langen Perioden am galaktischen Äquator, Gang der Anzahlen und der Periodenwerte sowie (etwas weniger klar) der Maximalhelligkeiten mit der galaktischen Länge. — Für 260 Me-Sterne mit klassifizierbaren Lichtkurven wird eine Beziehung zwischen Kurventyp und Maximalgröße abgeleitet und zur Bestimmung individueller Entfernungen und damit der räumlichen Anordnung dieser Sterne benutzt. — Der Gang der Sternzahlen und der Maximalhelligkeiten der äquatornahen Mirasterne mit der galaktischen Länge deutet auf eine schmale absorbierende Schicht hin, die sich beiderseits der Länge  $0^\circ$  in der Entfernung von etwa 900 pcs an bemerkbar macht. *Straßl* (Göttingen).

**Cecchini, G., e L. Gratton: Considerazioni statistiche sulle stelle nuove.** *Mem. Soc. astron. Ital.*, N. s. 12, 303—318 (1939).

Als Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchung werden die absoluten Größen neuer Sterne im Maximum gewählt, diese, sowie ihre Entfernungen werden nach verschiedenen unabhängigen Methoden diskutiert und es wird gefunden, daß die mittlere absolute Größe eines neuen Sternes im Maximum  $-7^m.3$  ist. Es zeigt sich, daß dieser Wert mit den absoluten Größen neuer Sterne im Maximum im Andromedanebel im allgemeinen übereinstimmt. Weiter untersuchen die Verff. die räumliche Verteilung und die Frequenz neuer Sterne im galaktischen System, es zeigt sich, daß jährlich 30—40 neue Sterne auftauchen, ähnlich wie im Andromedanebel. *Hubert Slouka* (Prag).

**Fricke, Walter: Der Einfluß eines widerstehenden Mittels in der Dynamik dichter Sternsysteme.** *Z. Astrophys.* 19, 304—338 (1940).

Verf. untersucht die Wirkung eines widerstehenden Mittels auf die Bewegung von Sternen und Sternsystemen, wobei er von der Ermittlung der Geschwindigkeitsverteilung und der Dichte in einem nichtkonservativen mechanischen System ausgeht und die Boltzmannsche Gleichung benützt. Zuerst wird das Verhalten von Einzelsternen und widerstehendem Mittel untersucht und die Materieverteilung im Potentialfeld eines Sternes besprochen. Es zeigt sich, daß die widerstehende Wirkung dichter stellarer Materie außer von der Masse und dem Radius des Sternes auch von dessen Temperatur abhängt, da der Strahlungsdruck mit steigender effektiver Temperatur die „effektive“ Dichte der umgebenden Materie verringert. Weiter wird eine dynamisch-statistische Theorie von Sternsystemen mit Mitteln der Boltzmannschen Statistik entwickelt und für kugelsymmetrische Sternsysteme durchgeführt. Verf. zeigt, daß in einem kugelsymmetrischen Sternsystem, das so dicht ist, daß die Wechselwirkungen allein zu statischer Stationarität führen würden, beim Vorhandensein eines widerstehenden homogenen Mittels eine Folge auseinander hervorgehender isothermer Gleichgewichtszustände möglich ist, welche mit einer Kontraktion des Systems verbunden ist. Diese Stationarität wird dauernd aufrechterhalten, wenn die Wechselwirkungen zwischen den Sternen trotz der Energiezerstreuung im widerstehenden Mittel genügend groß sind, was aber eine entsprechend große Sterndichte voraussetzt. *Hubert Slouka*.